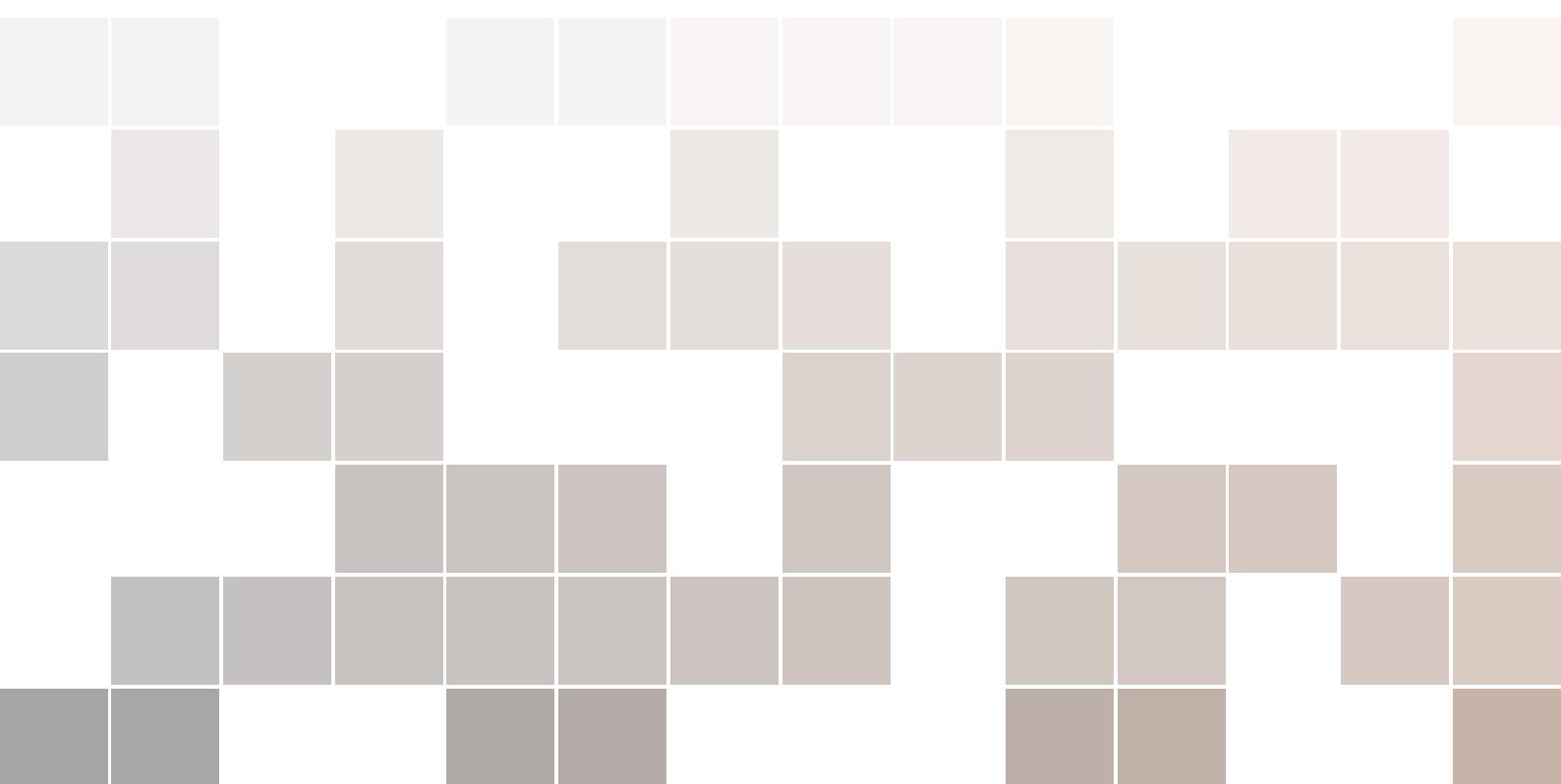


Daljinska istraživanja

- Kako snimiti i rekonstruirati SAR sliku -

Dario Bojanjac Marko Bosiljevac Filip Turčinović



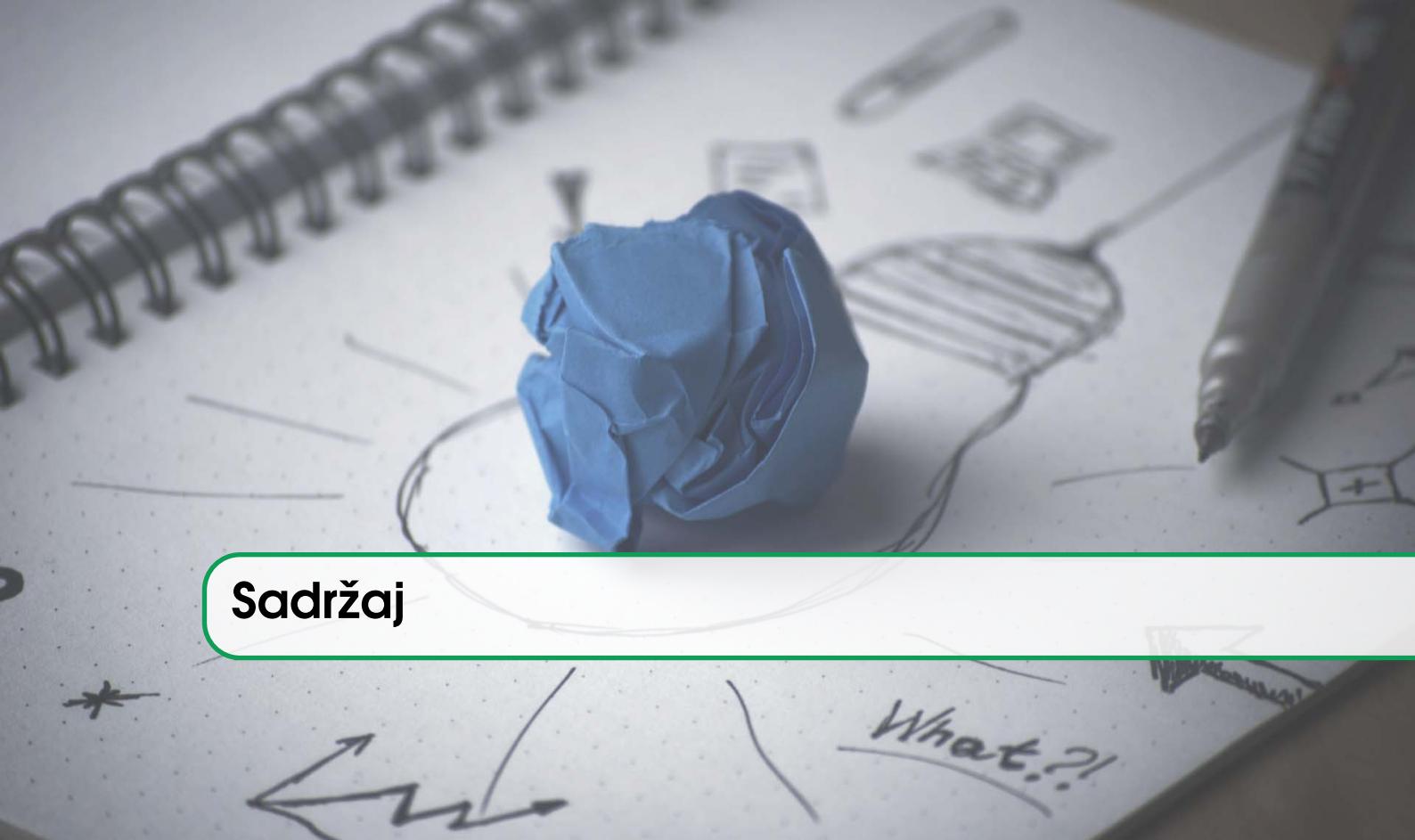
Copyright © 2023. /ZKIST

PUBLISHED BY FER

WWW.FER.UNIZG.HR

Ova skripta smije se koristiti isključivo u osobne svrhe te se ne smije ni na koji način mijenjati ili umnožavati, kao ni prikazivati, izvoditi ili distribuirati u javnosti i drugim medijima ili na bilo koji drugi način koristiti za bilo koju javnu ili komercijalnu svrhu.

Nerecenzirana verzija od 8. 8. 2023.



Sadržaj

I

Uvodni primjeri

1	Što su to daljinska istraživanja?	9
1.1	Što je i kako radi radar	10
1.2	Parametri antena	11
1.3	Osnovna radarska jednadžba	13
1.4	Vrste radara	15

II

Obrada signala i valne pojave

2	Analitički signal i IQ demodulator	19
2.1	Fourierova transformacija i spektar signala	19
2.2	Konvolucija i korelacija signala	26
2.3	Osnove Hilbertove transformacije	32
2.4	Što je analitički signal?	36
2.5	IQ postupak	40
3	Asimptotska aproksimacija integralnih funkcija	41
3.1	Primjena integralnih transformacija na linearne sustave	41
3.2	Krivulja najbržeg spusta	48
3.3	Metoda stacionarne faze	53

4	Elektromagnetski valovi	55
4.1	Maxwellove jednadžbe	55
4.2	Greenova funkcija	61
4.3	Raspršenje	62

III

Detekcija položaja i brzine objekta

5	Detekcija objekta	65
5.1	Model primljenog signala u slučaju statičnog objekta	65
5.2	Mjerenje udaljenosti nepoznatog objekta	69
5.3	Model primljenog signala u slučaju objekta koji se kreće	69
5.4	Mjerenje brzine nepoznatog objekta	73
6	Korelacijski prijamnik	75
6.1	Prilagođeni filter	75
6.2	Signali koje koristimo u primjeni	79

IV

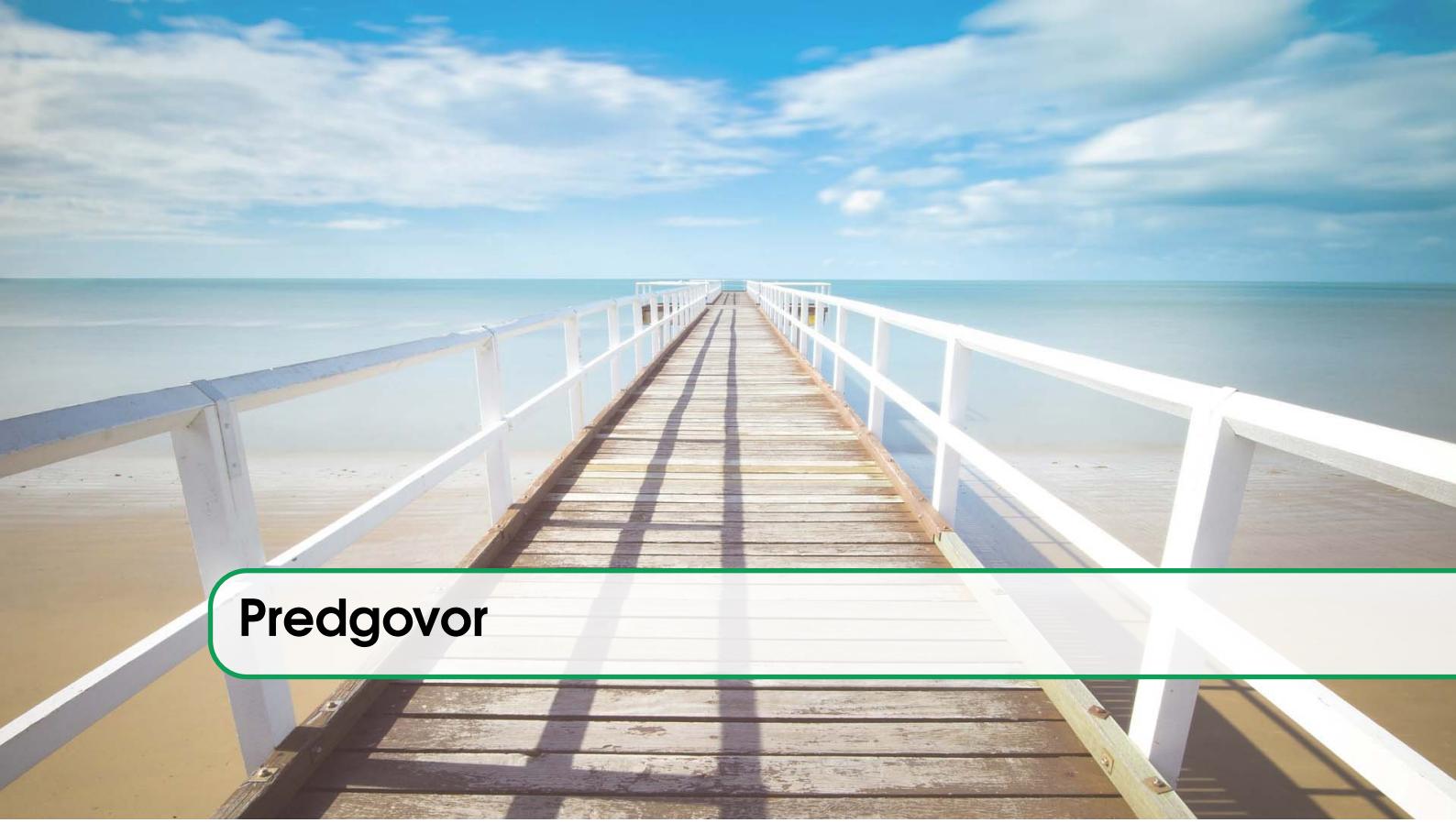
Radar sa sintetičkom aperturom (SAR)

7	Radar sa sintetičkom aperutom	83
7.1	FMCW radar	83
7.2	Primljeni signal kod SAR radara	83
8	Omega-k algoritam	85
8.1	Izvod Omega-k algoritma	85
8.2	Implementacija Omega-k algoritma	89

V

Dodatak

9	Repetitorij	93
9.1	Osnovno o signalima i LTI sustavima	93
9.2	Operacije s vektorima	93
9.3	Malo vjerojatnosti	93
9.4	Mikro uvod u distribucije	93
	Bibliografija	94
	Index	97



Predgovor

Kolegij Daljinska istraživanja izborni je kolegij na prvoj i drugoj godini diplomskoga studija na Fakultetu elektrotehnike i računarsva Sveučilišta u Zagrebu. Riječ je o kolegiju kojeg podjednako upisuju studenti Elektrothenike i informacijske tehnologije (EIT), studenti Komunikacijske i informacijske tehnologije (IKT) i studenti Računarstva (RAČ) s time da prednjače studenti profila Komunikacijske i svemirske tehnologije koji je dio IKT-a kojima je to i jezgreni predmet.

Za razvoj radarskog sustava potrebno je poznavati fiziku rasprostiranja elektromagnetskih valova, matematičko modeliranje kako bi se razvio model primljenog signala, proces obrade signala i algoritme za rekonstrukciju slike. Upravo to je pravi primjer onoga što Richard Hamming zove primjena.

Kolegij se predaje na način da se paralelno razvija potrebna teorija i ta teorija odmah se testira u primjenama. Kako izvedemo model primljenog signala u slučaju snimanja statičnog objekta u prostoru studenti odmah snimaju radarom statični objekt i pokušavaju otkriti koliko je udaljen iz podataka koje su snimili. Cilj kolegija je razumjeti matematičku i fizikalnu pozadinu, ali odmah je i primjeniti u praksi. Svi studenti na kolegiju moraju odraditi sva snimanja radarom, a kolegij se smatra položenim nakon što implementiraju omega-k algoritam za rekonstrukciju slike snimljene SAR radarem.

RSHub, znanstvena grupa, HRZZ projekt iz kojega je došao naš znanstveni rad i ideja za kolegijem. La la la, raspisi predgovor

Dario Bojanjac
Marko Bosiljevac
Filip Turčinović



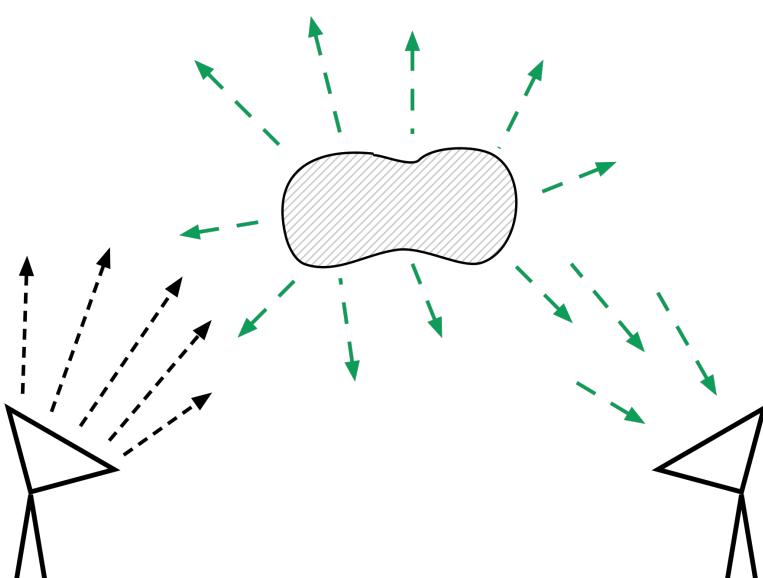
Uvodni primjeri

1	Što su to daljinska istraživanja?	9
1.1	Što je i kako radi radar	
1.2	Parametri antena	
1.3	Osnovna radarska jednadžba	
1.4	Vrste radara	



1. Što su to daljinska istraživanja?

Daljinska istraživanja definirana su kao metoda prikupljanja informacija o nekom objektu ili fenomenu u većem ili manjem opsegu pomoću uređaja za snimanje ili istraživanje u realnom vremenu koji je bežičan ili nije u fizičkom ili bliskom kontaktu s objektom. U ovisnosti o primjeni razlikuju se informacije koje želimo prikupiti, ali ugrubo možemo ih podijeliti u tri kategorije, položaj i kretanje, vanjski parametri i unutarnji parametri. Te informacije prikupljamo korištenjem valova. Odašiljemo valove u slobodni prostor, oni putuju prostorom i nailaze na različite prepreke, raspršuju se na tim preprekama i dijelom se vraćaju natrag na mjesto od kuda smo ih poslali u prostor. Iz tih povratnih valova, odjeka koji se doogodio, pokušavamo rekonstruirati informaciju o objektu ili procesu na kojemu su se valovi raspršili.



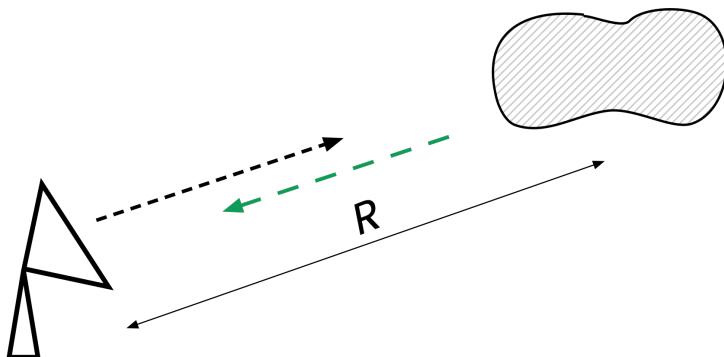
Slika 1.1: Princip daljinskih istraživanja.

U ovisnosti o primjenama razlikujemo i vrste valova. Tako u radarskim primjenama koristimo elektromagnetske valove u mikrovalnom području, kod lidara koristimo elektromagnetske valove u vidljivom i infracrvenom dijelu spektra, kod sonara zvučne valove dok se u tomografiji koriste X zrake i zvučni valovi. Različiti valovi imaju različita propagacijska svojstva te se koriste u različite primjene. Tako radar redovito koristimo za određivanje položaja, smjera i brzine kretanja nepoznatih metalnih objekata, određujemo topografiju Zemlje i koristimo ga u interferometriji za nadziranje mostova, brana ili aktivnost vulkana. Elektromagnetski valovi u vidljivom dijelu spektra ne ogibaju se oko objekata pa lidar redovito koristimo u mapiranju prostora, određivanju udaljenosti i kreiranju elevacijskih mapa. Tomografiju obično koristimo pri određivanju unutarnjih karakteristika objekata kao što su određivanje parametara materijala, medicinska dijagnostika i arheološka ispitivanja.

Napomena 1.1 Osnovni cilj daljinskih istraživanja je ekstrakcija informacije o nepoznatom objektu ili procesu iz mjerenih podataka. ■

1.1 Što je i kako radi radar

RADAR (RADio Detection And Ranging) je radiolokacijski uređaj koji odašilje elektromagnetske valove u prostor i prima njihov odjem iz prostora te iz tog odjeka određuje položaje, brzinu i smjer kretanja nepoznatih objekata u prostoru. Možemo ga shvatiti na isti način na koji shvaćamo baterijsku lampu. Kada je usmjerimo negdje u prostoru vidimo one objekte od kojih nam se svjetlost reflektira natrag.



Slika 1.2: Princip radara.

Ugrubo, radar se sastoji od odašiljačke i prijamne antene te sustava za obradu signala. Odašiljačka antena radara odašilje u slobodni prostor generirani signal u formi elektromagnetskih valova. Oni na svom putu nailaze na nepoznate objekte od kojih se dalje raspršuju u prostor. Određeni dio tih raspršenih elektromagnetskih valova vraća se natrag do prijamne antene radara. Prijamnik detektira signal u povratnim elektromagnetskim valovima i temeljem vremenske razlike između poslanog i primljenog signala računa udaljenost, položaj ili brzinu objekta od kojih su se primljeni elektromagnetski valovi reflektirali. Ako se nepoznati objekt od kojih su se povratni elektromagnetski valovi reflektirali nalazi na udaljenosti R od radara onda su elektromagnetski valovi koje smo poslali prošli dvostruku udaljenost od radara do objekta. Jednu udaljenost R prešli su na putu od radara prema objektu, a drugu udaljenost R na putu natrag, od objekta prema radaru. Ako vremensku razliku između trenutka slanja signala u prostor i trenutka primanja povratnog signala označimo s T_0 , udaljenost objekta možemo izračunati po formuli

$$R = \frac{cT_0}{2} \quad (1.1)$$

Proces određivanja položaja, brzine i smjera kretanja nepoznatih objekata u prostoru radarom možemo podijeliti u tri cjeline, generiranje impulsa i odašiljanje elektromagnetskih valova u slobodni prostor, detekcija reflektiranih elektromagnetskih valova i ekstrakcija informacije iz primljenog signala. Prve dvije cjeline hardverski su orientirani problemi čija je implementacija dobrim dijelom riješena u smislu postojeće tehnologije. Najzanimljiviji dio iz perspektive ovog kolegija je dio koji se tiče ekstrakcija informacije iz primljenog signala. Kako bismo izvukli informaciju iz primljenih signala prvo moramo razviti matematički model koji opisuje primljeni signal u određenom radarskom sustavu. Na temelju tog modela interpretirat ćemo primljene signale i informaciju koja se u njima nalazi. Matematički model će nam sugerirati koji koraci u procesu obrade signala su potrebni kako bismo pripremili signal za ekstrakciju korisne informacije i na temelju razvijenih modela i procesa obrade signala razvit ćemo algoritme za ekstrakciju informacije i rekonstrukciju slike. Upravo u tom području puno je otvorenih pitanja i neka od njih predstavit ćemo u nadolazećim poglavljima.

1.2 Parametri antena

Antena je objekt kojim odašiljemo elektromagnetsku energiju u prostor ili primamo elektromagnetsku energiju iz prostora. Ona je adapter između strujnog kruga i slobodnog prostora jer je s jedne strane antene, na njenim priključnicama, strujni krug kojim teče struja i tom strujom privodimo elektromagnetsku energiju anteni, dok sama antena stoji u prostoru i odašilje ili prikuplja elektromagnetsku energiju u obliku elektromagnetskih valova. Antena je sastavni dio svakog komunikacijskog sustava jer nam omogućuje bežično slanje i primanje podataka. Teorija antena široka je teorija koja obuhvaća matematičko modeliranje geometrije antena, izradu antena i analizu antenskih sustava. Za naše potrebe u radarskim primjenama dovoljne su osnove teorije koje ćemo iznijeti u uvodnom poglavlju.

Antenu, kao objekt kojim uzimamo elektromagnetsku energiju iz prostora, možemo zamisliti kao posudu kojom uzimamo vodu iz jezera. Posuda ima neki otvor i što je veći taj otvor to u jednom uzimanju možemo zagrabit više vode. Tako je i kod antene. Ulogu otvora posude ima efektivna površina antene A_{ef} koja nam govori koliko elektromagnetske energije možemo uzeti prilikom jednog grabljenja. Objektiv fotoaparata je isto antena i otvor blende kod objektiva, f broj, opisuje koliko svjetla može doći na senzor. Objektiv ima i određenu usmjerenost izraženu kroz žarišnu duljinu objektiva koja nam govori koji dio prostora ćemo moći uhvatiti fotoaparatom.

Privodimo li snagu P_{rad} anteni koja zrači jednoliko u svim smjerovima prostora, izračena će se snaga širiti sferno od izvora i jednoliko raspodijeliti po sferi. Na udaljenosti R od izvora gustoća snage S_{avg} jednaka je usrednjenoj snazi po oplošju sfere polumjera R i iznosi

$$S_{avg} = \frac{P_{rad}}{4R^2\pi}. \quad (1.2)$$

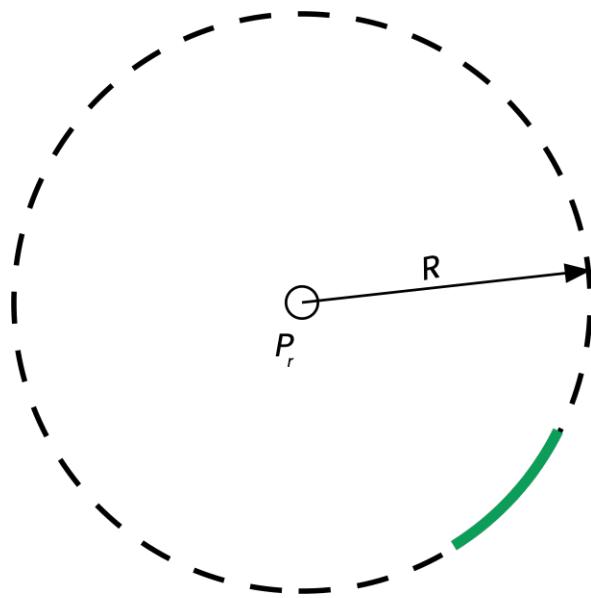
Nalazi li se prijamna antena na udaljenosti R od odašiljačke antene ona će osjetiti upravo tu gustoću snage S_{avg} i u ovisnosti o svojoj efektivnoj površini A_{ef} iz slobodnog prostora primit će snagu

$$P_r = A_{ef} S_{avg} \quad (1.3)$$

i predati je strujnom krugu na koji je spojena. Ukupna snaga koju smo predali anteni P_{rad} jednaka je integralu gustoće snage S_{avg} po svakoj sferi S^1 kojoj je antena kojom zračimo u prostoru u središtu

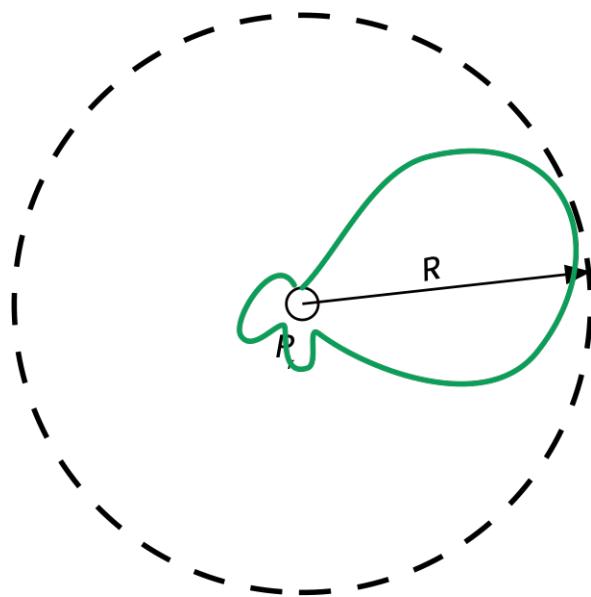
$$P_{rad} = \int_{S^1} S_{avg} R^2 d\omega = \int_{S^1} S_{avg} R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi. \quad (1.4)$$

U praksi želimo da antena koju koristimo ne zrači jednoliko u svim smjerovima nego da u smjerovima u kojima treba zračiti više snage zrači više, a u smjerovima u kojima ne želimo zračiti



Slika 1.3: Gustoća snage na mjestu antene i efektivna površina antene.

snagu ona zrači manje. Tipičan primjer je bazna postaja za mobilne komunikacije. Svakako ne želimo da bazna postaja zrači iznad sebe jer većina korisnika mobilnih uređaja je na tlu, a ne u zraku iznad bazne postaje. Parametar antene koji opisuje kako antena preraspodjeljuje izračenu snagu u prostoru je intenzitet zračenja antene. Označavamo ga oznakom U i izražavamo u jedinicama W/sr. Postavimo li središte sfernog koordinatnog sustava u antenu tada intenzitet zračenja možemo izraziti u sfernem koordinatnom sustavu kao funkciju $U(\theta, \phi)$ gdje su θ i ϕ standardni kutevi sfernog koordinatnog sustava.



Slika 1.4: Zračenje usmjerenje antene ne širi se sferno od antene nego postoje smjerovim u prostoru u kojima antena zrači više i one u kojima zrači manje snage.

Usmjerenost antene D je parametar koji opisuje koliko dobro antena fokusira energiju u određenom smjeru u prostoru u odnosu na antenu koja zrači jednoliko u svim smjerovima. Na

isti način kao i kod intenziteta zračenja usmjerenošć je funkcija koju možemo izraziti u sfernim koordinatama kao

$$D(\theta, \phi) = \frac{U(\theta, \phi)}{\frac{P_{rad}}{4\pi}}. \quad (1.5)$$

Antenu koja zrači jednoliko u svim smjerovima zovemo izotropni radijator. Njegova usmjerenošć $D(\theta, \phi) = 1$.

Može se pokazati da su usmjerenošć antene i efektivna površina povezani formulom

$$A_{ef} = \frac{\lambda^2}{4\pi} D(\theta, \phi). \quad (1.6)$$

1.3 Osnovna radarska jednadžba

Osnovna radarska jednadžba opisuje rezoluciju radara u ovisnosti o parametrima radara kao što su radna frekvencija, izračena snaga, parametri antenskog sustava koji koristimo i slično. Riječ je o jednostavnom modelu koji povezuje usmjerenu antenu i nepoznati neusmjereni objekt. Objekti koje snimamo imaju neke elektromagnetske parametre koje ne poznajemo, ali im u odnosu na mjerene podatke možemo pridijeliti neke efektivne parametre.

Radarski presjek (eng. Radar Cross-Section ili RCS) je površina objekta. To nije fizička površina jer objekti u prostoru imaju volumen, a ne površinu, nego ekvivalentna površina u nekom presjeku prostora koja uzima u obzir veličinu i reflektivnost objekta. Manji objekti koji jače reflektiraju elektromagnetske valove mogu imati veći radarski presjek od velikih, ali slaboreflektirajućih objekata. Tako će na primjer tenk imati veći radarski presjek od drvene kuće. Ako ste letjeli avionom susreli ste se s pojmom da odbljesak sunca od nekog prozora vidite na vrlo visokoj visini na kojoj letite dok kuću uopće ne primjećujete. Radarski presjek je zapravo efektivna površina objekta koja. Označavamo ga sa σ .

U izvodu osnovne radarske jednadžbe zračit ćemo snagu P_{rad} usmjerrenom antenom u prostor. Dio te snage dolazit će kao $P_{rad}D$ do objekta na udaljenosti R kao gustoća snage S_i kao što možemo vidjeti na slici 1.5.

Objekt iz prostora prima snagu proporcionalnu svom radarskom presjeku σ i gustoći snage S_i

$$P_i = \sigma S_i = \frac{\sigma P_{rad}}{4R^2\pi} D(\theta, \phi) \quad (1.7)$$

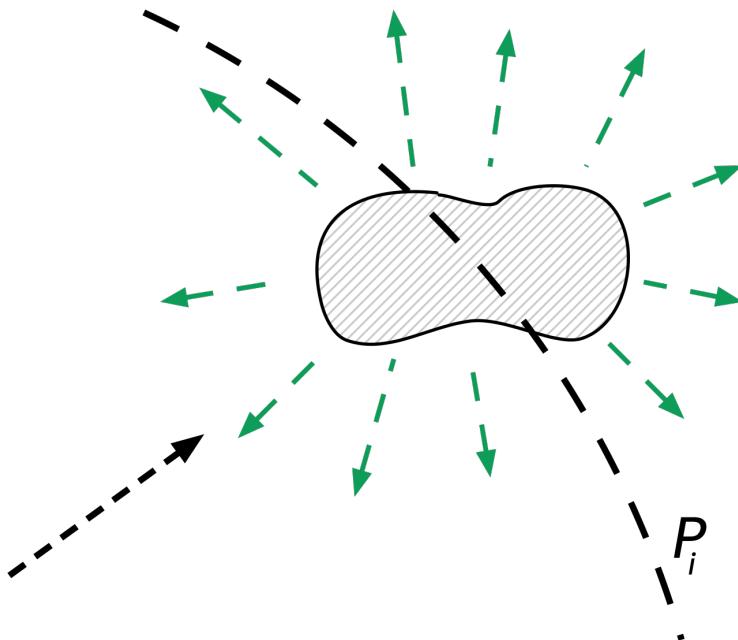
i dio te snage raspršuje natrag u prostor u obliku raspršenog vala. Radi jednostavnosti pretpostavimo da objekt rasprši cijelu snagu što je dobra aproksimacija u slučaju metalnog objekta. Objekt nije antena pa možemo pretpostaviti da raspršuje jednoliko u svim smjerovima, tj. da ima usmjerenošć $D = 1$.

Od objekta se raspršuje snaga P_i jednoliko u svim smjerovima pa je gustoća snage S_r , koja se vraća natrag do radara jednaka

$$S_r = \frac{P_i}{4R^2\pi} = \frac{\sigma P_{rad}}{(4\pi R^2)^2} D(\theta, \phi). \quad (1.8)$$

Prijamna antena ima efektivnu površinu A_{ef} pa je ukupna snaga P_r koju preuzima iz prostora jednaka

$$P_r = A_{ef} S_r = \frac{\lambda^2}{4\pi} \frac{\sigma P_{rad}}{(4\pi R^2)^2} D^2(\theta, \phi). \quad (1.9)$$



Slika 1.5: Gustoća snage na mjestu objekta.

što nam daje omjer poslane snage u prostor i primljene snage kao

$$\frac{P_r}{P_{rad}} = \frac{\sigma \lambda^2}{4\pi (4\pi R^2)^2} D^2(\theta, \phi) \quad (1.10)$$

Što objekt kojeg snimamo ima veći radarski presjek σ to on bolje reflektira elektromagnetske valove, a time je i omjer primljene i poslane snage veći. Omjer snage ovisan je o četvrtoj potenciji udaljenosti R jer na putu od antene do objekta gustoća snage opada s R^2 i isto se događa s gustoćom snage koja se širi od objekta natrag prema radaru. U slučaju niže radne frekvencije radarskog sustava možemo očekivati višu razinu prijemne snage za sve ostale iste parametre.

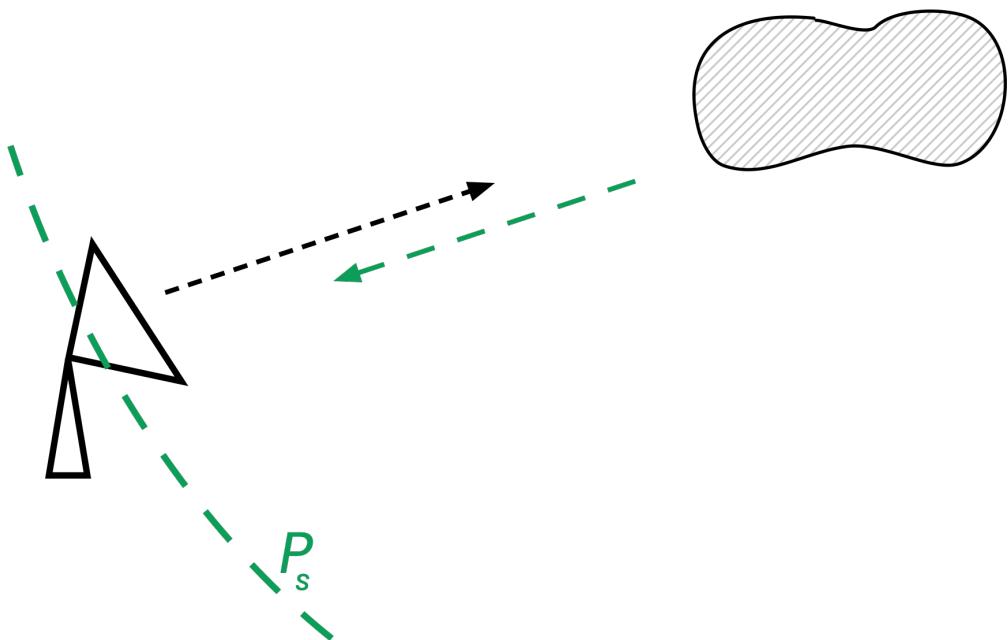
Prethodni omjer možemo interpretirati kao formulu koja u odnosu na dane parametre sustava određuje rezoluciju radara, tj. određuje minimalni radarski presjek koji objekt mora imati kako bi ga radar s tim parametrima mogao detektirati. Objekt nižeg radarskog presjeka naš radar neće detektirati. Zato to i zovemo rezolucija radara. U tom obliku, prethodnu formulu zovemo osnovna radarska jednadžba

$$\sigma = 4\pi \frac{P_r}{P_{rad}} \frac{R^4 \lambda^2}{A_{ef}^2}. \quad (1.11)$$

Želimo li radar veće rezolucije, tj. nižeg minimalnog radarskog presjeka koji naš radar može detektirati, imamo nekoliko opcija. Povećati radnu frekvenciju sustava, povećati izračenu snagu, povećati efektivnu površinu antene što obično radimo tako da koristimo antenske nizove ili se dodatno približimo objektima koje snimamo. Vidjet ćemo kasnije koje su od ovih realne u praksi i kako se neki od tih parametara povećavaju kod radara sa sintetičkom aperturom.

■ Primjer 1.1 — Rezolucija radara. Snimamo Zemlju iz satelita koristeći radar na 60 GHz snage 250 W. Satelit kruži oko Zemlje na visini 500 km. Efektivna površina antene iznosi 10 m

Izračunajte rezoluciju radara. Izračunajte rezoluciju radara ako satelit spustite na 400 km visine
Najutjecajniji faktor u izračunu rezolucije radara je udaljenost koja se javlja s četvrtom potencijom. Raspisati primjer do kraja. ■



Slika 1.6: Gustoća snage na mjestu objekta.

1.4 Vrste radara

Obrada signala i valne pojave

2	Analitički signal i IQ demodulator	19
2.1	Fourierova transformacija i spektar signala	
2.2	Konvolucija i korelacija signala	
2.3	Osnove Hilbertove transformacije	
2.4	Što je analitički signal?	
2.5	IQ postupak	
3	Asimptotska aproksimacija integralnih funkcija	41
3.1	Primjena integralnih transformacija na linearne sustave	
3.2	Krivulja najbržeg spusta	
3.3	Metoda stacionarne faze	
4	Elektromagnetski valovi	55
4.1	Maxwellove jednadžbe	
4.2	Greenova funkcija	
4.3	Raspršenje	

2. Analitički signal i IQ demodulator

Kao što smo mogli vidjeti u uvodnom poglavju, sliku snimljenu radarom sa sintetičkom aperturom možemo interpretirati kao dvodimenzionalni signal s jednom dimenzijom u prostornoj, a drugom dimenzijom u frekvencijskoj ili Fourierovoj domeni. Prostornu i frekvencijsku domenu radarske slike otkrit ćemo analizom primljenog signala, signala koji u sebi nosi informaciju o objektu na kojem je došlo do raspršenja poslanog vala. Taj primljeni signal vremenski je ovisan signal. U ovih par rečenica možemo vidjeti da u analizi radarske slike moramo razlikovati prostor, vrijeme, prostornu i vremensku frekvenciju signala. U analizi signala koristimo Fourierovu transformaciju, u prostoru i vremenu, kao i pojam analitičkog signala. Više o samoj Fourierovoj transformaciji i primjenama u obradi signala možete naći u knjizi Signal Processing: A Mathematical Approach [16].

2.1 Fourierova transformacija i spektar signala

Vremenski ovisan signal u je funkcija $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ čiju varijablu t interpretiramo kao vrijeme. Naizmjenično ćemo pisati u i $u(t)$ u ovisnosti o tome želimo li posebno istaknuti varijablu signala. Prepostavit ćemo da je u signal konačne energije, tj. signal za koji vrijedi

$$\int_a^b u^2(t) dt < \infty. \quad (2.1)$$

Za signale konačne energije moguće je definirati njihovu Fourierovu transformaciju.

Definicija 2.1.1 Neka je $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ signal konačne energije. Fourierova transformacija signala u dana je izrazom

$$\hat{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u(t) dt. \quad (2.2)$$

Fourierova transformacija realnog signala u daje nam kompleksnu funkciju \hat{u} koju zovemo spektar signala u . Ona sadrži informacije o tome koji se titraji, kojih frekvencija, pojavljuju u

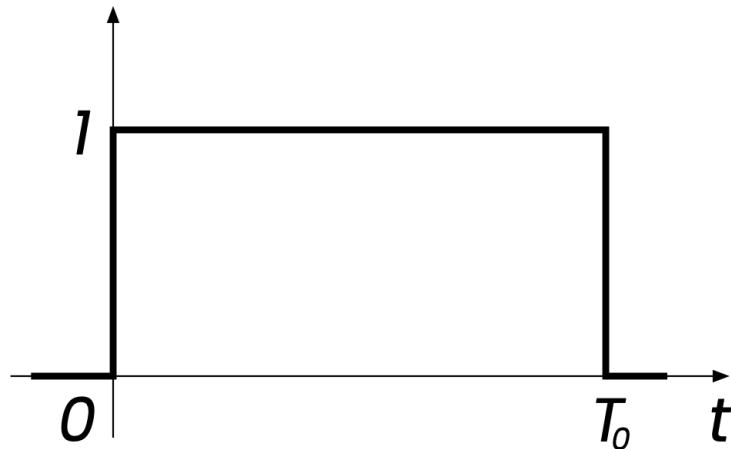
signalu u i to s kojom applitudom i fazom. Integral u definiciji Fourierove transformacije možemo interpretirati kao skalarni produkt na signalima konačne energije, a po Eulerovoj formuli znamo da je funkcija $e^{i\omega_0 t}$ periodična funkcija kružne frekvencije ω_0 . Na ovaj način Fourierovu transformaciju možemo interpretirati kao skalarnu projekciju signala u na titraje kružne frekvencije ω_0 što nam upravo daje applitudu i fazu titraja kružne frekvencije ω_0 sadržanu u našem signalu.

Interpretiramo li spektar signala u na način na koji je objašnjeno jasno je da početni signal možemo rekonstruirati iz spektra. Dovoljno je da zbrojimo sve moguće titraje koji se nalaze u našem signalu zajedno s pripadnim applitudama i fazama, tj.

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{u}(\omega) d\omega. \quad (2.3)$$

Ovako definiranu transformaciju, koja za spektar daje signal zovemo Inverzna Fourierova transformacija. Teorija koja objašnjava kada je to moguće nadilazi ovu knjigu. Dovoljno je zapamtiti da Fourierova transformacija signala konačne energije daje spektar konačne energije i da su u tom slučaju obje transformacije dobro definirane. Mi ćemo se u knjizi baviti samo takvim signalima koji su uz to i dovoljno glatki da su njihove derivacije definirane i da su i one konačne energije. Sve zamjene poretku integracije također su opravdane ovim uvjetima. Matematička teorija koja precizno definira sve potrebne pojmove može se pronaći u bilo kojoj knjizi o teoriji distribucija. Jedna od boljih knjiga tog tipa je *Introduction to the Theory of Distributions* [15].

■ Primjer 2.1 — Pravokutni impuls. Izračunajte spektar pravokutnog impulsa koji počinje u trenutku $t = 0$, traje T_0 vremena i ima applitudu 1. Signal je dan na slici 2.1.



Slika 2.1: Pravokutni impuls trajanja T_0 i amplitude 1.

Pravokutni impuls sa slike 2.1 možemo opisati funkcijom

$$u = \begin{cases} 1, & \text{za } 0 \leq t \leq T_0, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Nebitno je pišemo li 1, za $0 \leq t \leq T_0$ ili 1 za $0 < t < T_0$ jer integral ne vidi što se događa u jednoj točki. Spektar će biti isti na koji god od ova dva načina napisali signal sa slike 2.1. Za izračun

spektra signala dovoljno je krenuti po definiciji Fourierove transformacije. Dobijemo

$$\begin{aligned}\hat{u}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u(t) dt = \int_0^{T_0} e^{-i\omega t} 1 dt = \left| \frac{-i\omega t = \tau}{dt = \frac{d\tau}{-i\omega}} \right| = \frac{1}{-i\omega} \int_0^{-i\omega T_0} e^\tau d\tau \\ &= \frac{1}{-i\omega} e^\tau \Big|_0^{-i\omega T_0} = \frac{e^{-i\omega T_0} - 1}{-i\omega} = \frac{i}{\omega} e^{-i\omega \frac{T_0}{2}} \left[e^{-i\omega \frac{T_0}{2}} - e^{i\omega \frac{T_0}{2}} \right].\end{aligned}$$

Korištenjem Eulerovog identiteta $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ dobijemo zapis funkcije sinus preko kompleksnih eksponencijalnih funkcija

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \quad (2.5)$$

Korištenjem predhodnog zapisa izračunati spektar pravokutnog signala sa slike 2.1 možemo napisati u obliku funkcije sinus kao

$$\hat{u}(\omega) = T_0 e^{-i\omega \frac{T_0}{2}} \frac{\sin\left(\omega \frac{T_0}{2}\right)}{\omega \frac{T_0}{2}} = T_0 e^{-i\omega \frac{T_0}{2}} \text{sinc}\left(\omega \frac{T_0}{2}\right). \quad (2.6)$$

Vidimo da se amplituda spektra pravokutnog signala sa slike 2.1 ponaša kao funkcija $\frac{\sin(\omega)}{\omega}$, tj. titra kružnom frekvencijom ω dok amplituda T_0 titraja pada s funkcijom ω^{-1} . Nultočke spektra nalaze se u točkama u kojima je argument funkcije sinus, $\omega \frac{T_0}{2}$, jednak $2\pi + m\pi$ gdje je m cijeli broj, osim za točku $\omega = 0$ u kojoj spektar ima vrijednost $\hat{u}(0) = T_0$. Uvrštavanjem uvjeta za nultočke u spektru pravokutnog signala sa slike 2.1 dobijemo uvjete za kružnu frekvenciju

$$\omega = \frac{4\pi}{T_0} + \frac{2m\pi}{T_0}, \quad \text{za } m \in \mathbb{Z} \quad (2.7)$$

ili za frekvenciju

$$f = \frac{2}{T_0} + \frac{m}{T_0} = 2f_0 + mf_0, \quad \text{za } m \in \mathbb{Z}. \quad (2.8)$$

Vidimo da spektar ima svoje nultočke upravo na višekratnicima osnovne frekvencije f_0 definirane trajanjem pravokutnog signala.

Spektar signala je kompleksna funkcija realne varijable ω . Svaku kompleksnu funkciju možemo prikazati preko amplitude i faze. Amplitudni dio spektra zovemo amplitudno-frekvencijska karakteristika dok fazni dio spektra zovemo fazno-frekvencijska karakteristika. Izračunati spektar može se rastaviti na amplitudno-frekvencijsku karakteristiku

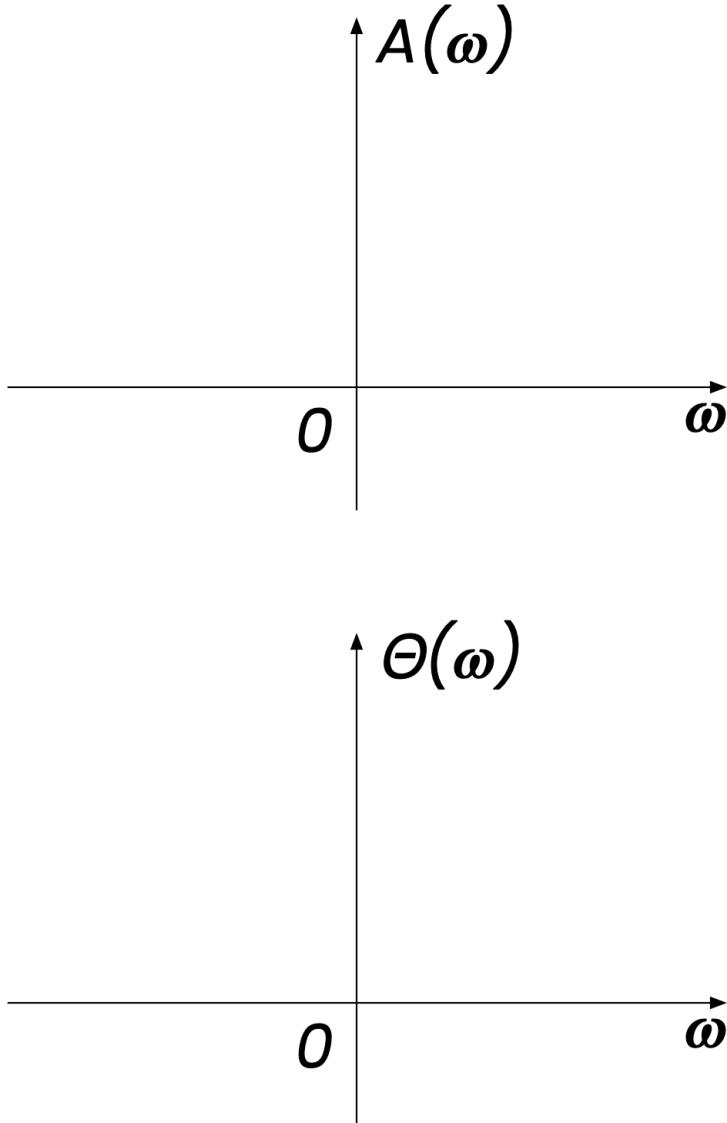
$$A(\omega) = |\hat{u}(\omega)| = T_0 \frac{\sin\left(\omega \frac{T_0}{2}\right)}{\omega \frac{T_0}{2}} \quad (2.9)$$

i fazno-frekvencijsku karakteristiku

$$\Theta(\omega) = \arg(\hat{u}(\omega)) = \omega \frac{T_0}{2} \quad (2.10)$$

koje možete vidjeti na slici 2.2. ■

Pravokutni signal mogli smo i drugačije pozicionirati u vremenu. Možemo ga pomaknuti za pola vremena T_0 uljevo kako bismo dobili simetričan signal koji možemo vidjeti na slici 2.3



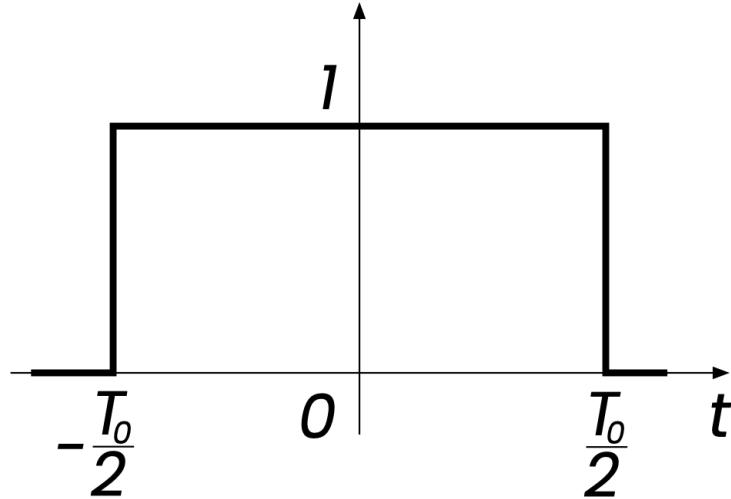
Slika 2.2: Amplitudno-frekvencijska i fazno-frekvencijska karakteristika pravokutnog signala amplitude 1 koji počinje u $t = 0$ i traje T_0 .

■ **Primjer 2.2 — Pravokutni impuls simetričan oko osi $t = 0$.** Izračunajte spektar pravokutnog impulsa trajanja T_0 , amplitudu 1, simetričnog oko osi $t = 0$. Signal je dan na slici 2.3.

Direktnom primjenom Fourierove transformacije dobijemo

$$\begin{aligned}\hat{u}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u(t) dt = \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-i\omega t} 1 dt = \left| \frac{-i\omega t = \tau}{dt = \frac{d\tau}{-i\omega}} \right| = \frac{1}{-i\omega} \int_{i\omega \frac{T_0}{2}}^{-i\omega \frac{T_0}{2}} e^\tau d\tau \\ &= \frac{1}{-i\omega} e^\tau \Big|_{i\omega \frac{T_0}{2}}^{-i\omega \frac{T_0}{2}} = \frac{2}{\omega} \left[e^{i\omega \frac{T_0}{2}} - e^{-i\omega \frac{T_0}{2}} \right] = T_0 \frac{\sin(\omega \frac{T_0}{2})}{\omega \frac{T_0}{2}}.\end{aligned}$$

Amplitudno-frekvencijska karakteristika pravokutnog signala simetričnog oko $t = 0$ jednaka je $A(\omega) = T_0 \frac{\sin(\omega \frac{T_0}{2})}{\omega \frac{T_0}{2}}$ dok je fazno-frekvencijska karakteristika jednaka $\Theta(\omega) = 0$. Vidimo da spektar



Slika 2.3: Pravokutni impuls trajanja T_0 i amplitude 1, simetričan oko $t = 0$.

pomaknutog pravokutnog signala ima fazni pomak od $e^{-i\omega \frac{T_0}{2}}$ u odnosu spektar na pravokutnog signala istog trajanja koji počinje u $t = 0$. Amplitudno-frekvencijske karakteristike su im jednake. ■

Općenito, ako signal $u(t)$ pomaknemo u vremenu za T_0 dobit ćemo signal $u_1(t) = u(t - T_0)$ čiji je spektar jednak

$$\begin{aligned}\hat{u}_1(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u_1(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u(t - T_0) dt = \left| \frac{t - T_0}{dt} = \tau \right| = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(\tau+T_0)} u(\tau) d\tau \\ &= e^{-i\omega T_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} u(\tau) d\tau = e^{-i\omega T_0} \hat{u}(\omega).\end{aligned}$$

Pomak signala u vremenu prelazi u fazni pomak spektra za $e^{-i\omega T_0}$, tj. spektar originalnog i spektar pomaknutog signala razlikuju se isključivo u fazi. Amplitude su jednake u oba slučaja jer vremenski pomak mijenja isključivo fazni dio spektra. Prethodni signal parna je funkcija, tj. vrijedi da je $u(-t) = u(t)$. Općenito za parne signale u možemo pokazati da im je spektar realan. Vrijedi da je

$$\begin{aligned}\bar{\hat{u}}(\omega) &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u(t) dt} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} u(t) dt = \left| \frac{t}{dt} = -\tau \right| = \int_{\infty}^{-\infty} e^{-i\omega\tau} u(-\tau) (-d\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} u(-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} u(\tau) d\tau\end{aligned}\tag{2.11}$$

jer je signal u paran. To nam daje jednakost $\bar{\hat{u}}(\omega) = \hat{u}(\omega)$, tj. spektar parnog signala realna je funkcija. Na sličan način možemo pokazati da je spektar neparnog signala neparna i čisto imaginarna funkcija. Vrijedi

$$\begin{aligned}\hat{u}(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(-\omega)t} u(t) dt = \left| \frac{t}{dt} = -\tau \right| = \int_{\infty}^{-\infty} e^{i\omega(-\tau)} u(-\tau) (-d\tau) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} u(\tau) d\tau\end{aligned}\tag{2.12}$$

jer je signal u neparna funkcija. Vidimo da je $\hat{u}(-\omega) = -\hat{u}(\omega)$ tj. spektar neparnog signala je neparan. Neparnost nam daje i

$$\begin{aligned}\bar{\hat{u}}(\omega) &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u(t) dt} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} u(t) dt = \left| \begin{array}{l} t = -\tau \\ dt = -d\tau \end{array} \right| = \int_{\infty}^{-\infty} e^{-i\omega\tau} u(-\tau) (-d\tau) \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} u(\tau) d\tau = -\hat{u}(\omega).\end{aligned}\quad (2.13)$$

Kompleksna funkcija za koju vrijedi da je $\bar{\hat{u}}(\omega) = -\hat{u}(\omega)$ čisto je imaginarna funkcija.

U primjerima će nam se često javljati derivacija signala pa je dobro znati povezati spektar derivacije signala i spektar početnog signala. Vrijedi da je

$$\begin{aligned}\hat{u}'(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u'(t) dt = \left| \begin{array}{l} f = e^{-i\omega t} \\ df = -i\omega e^{-i\omega t} dt \\ g = u(t) \\ dg = u'(t) dt \end{array} \right| \\ &= u(t)e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u(t) dt\end{aligned}\quad (2.14)$$

Za signale konačne energije u vrijedi da $u \rightarrow 0$ kada $t \rightarrow \pm\infty$. Kada to ne bi bilo ispunjeno signal ne bi bio konačne energije jer bismo mogli pronaći neki $\varepsilon > 0$ takav da je $|u| > \varepsilon$ kada $t \rightarrow \pm\infty$ čime bi energija odmah postala beskonačna. Prema tome, prvi dio gornje jednakosti jednak je 0. To znači da je

$$u(t)e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u(t) dt = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u(t) dt = i\omega \hat{u}(\omega).\quad (2.15)$$

Vidimo da je spektar derivacije signala jednak spektru početnog signala pomnoženog s kružnom frekvencijom ω . Možemo reći da Fourierova transformacija prevodi derivaciju u množenje varijablom.

Teorem 2.1.1 — Plancharellov teorem. Neka su $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ signali konačne energije. Tada vrijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\bar{v}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\omega)\bar{\hat{v}}(\omega) d\omega.\quad (2.16)$$

Uzmemo li da je $v = u$ dobijemo poznatu Parsevalovu jednakost

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}(\omega)|^2 d\omega\quad (2.17)$$

koja nam kaže da je energija signala jednaka energiji svih spektralnih komponenata. Možemo to interpretirati i na drugačiji način. Zbrojimo li energiju u svakoj pojedinoj spektralnoj komponenti spektra signala u dobit ćemo energiju signala u .

Napomena 2.1 — Koja je varijabla Fourierove transformacije signala? Fourierovu transformaciju signala interpretirali smo kao spektar signala, tj. amplitude i faze svih titraja koji se u tom signalu nalaze. Pri tome smo kao prirodnu varijablu koristili kružnu frekvenciju ω . Kasnije smo zaključili da iz tih titraja možemo rekonstruirati početni signal. No, to je samo naša interpretacija. Fourierova transformacija ne zna koja joj je prirodna varijabla i ne zna

interpretaciju koju smo mi dali. To znači da nije inverzna Fourierova transformacija jedina transformacija koju možemo napraviti na spektru već da spektar također možemo probati još jednom transformirati Fourierovom transformacijom. Taj proces česta je tehnika u rješavanju problema Fourierovom transformacijom i mi ćemo je koristiti u definiciji analitičkog signala. ■

U formuli za Inverznu Fourierovu transformaciju

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{u}(\omega) d\omega \quad (2.18)$$

možemo uočiti dvije stvari. Ključna razlika između Fourierove transformacije i Inverzne Fourierove transformacije je u predznaku u eksponencijalnoj funkciji. Kako bismo dobili negativan predznak dovoljno je da promatramo funkciju $u(-t)$ umjesto funkcije $u(t)$. Druga stvar koju možemo uočiti je da osim toga nema neke velike razlike između te dvije transformacije, osim konstante ispred integrala, jer u obje transformacije integriramo po varijabli podintegralne funkcije. Pogledamo li što se događa s funkcijom $u(-t)$ vidimo da je ona jednaka

$$u(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \hat{u}(\omega) d\omega \quad (2.19)$$

što je zapravo Fourierova transformacija funkcije $\frac{1}{2\pi} \hat{u}(\omega)$. Vrijedi da je

$$\hat{u}(t) = 2\pi u(-t). \quad (2.20)$$

Uzastopna primjena dvije Fourierove transformacije na signal u reflektira varijablu oko osi $t = 0$ i množi funkciju s 2π . To znači da nam četverostruka uzastopna primjena Fourierove transformacije daje natrag početni signal pomnožen s $(2\pi)^2$, tj.

$$\hat{\hat{\hat{u}}}(t) = (2\pi)^2 u(t). \quad (2.21)$$

■ Primjer 2.3 — Derivacija i spektar funkcije predznak. Funkcija sgn je funkcija predznak koja se obično definira kao

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & \text{za } t < 0, \\ 0, & \text{za } t = 0, \\ 1, & \text{za } t > 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Funkcija sgn ima prekid u točki $t = 0$ pa svakako nije derivabilna u klasičnom smislu. Njena derivacija može se definirati u smislu distribucija. U dodatku na kraju knjige izvedena je njena distribucijska derivacija, ali tu derivaciju možemo shvatiti intuitivno. Derivacija opisuje brzinu promjene funkcije, a ako funkcija ima skok tada je brzina promjene u skoku beskonačna. To obično označavamo Diracovom δ distribucijom. Funkcija sgn je konstanta čim se malo pomaknemo od točke $t = 0$ što znači da je njena derivacija u svim točkama u kojima je $t \neq 0$ zapravo 0. U točki $t = 0$ funkcija sgn ima skok od -1 do 1 što je razlika 2. To nam intuitivno govori da njenu derivaciju možemo napisati kao

$$\text{sgn}'(t) = 2\delta(t). \quad (2.23)$$

Primjenimo li Fourierovu transformaciju na predhodnoj jednakosti dobit ćemo da je $\widehat{\text{sgn}'}(\omega) = 2\hat{\delta}(\omega)$ što nam po svojstvima Fourierove transformacije daje

$$i\omega \widehat{\text{sgn}}(\omega) = 2. \quad (2.24)$$

Vrijedi da je

$$\widehat{\operatorname{sgn}}(\omega) = \frac{2}{i\omega} + c\delta(\omega) \quad (2.25)$$

za neku realnu konstantu c . Dio spektra koji uključuje $c\delta(\omega)$ pojavljuje se zato što s lijevu stranu prethodne jednakosti množimo s ω koji može eliminirati δ funkciju zato što je $\omega\delta(\omega)$ uvijek jednako 0. Srećom, u našem slučaju to se ne može dogoditi jer je funkcija sgn neparna funkcija, a prije smo dokazali da je spektar neparne funkcije neparan pa on ne može uključivati $c\delta(\omega)$. Upravo smo pokazali da je spektar funkcije predznak jednak

$$\widehat{\operatorname{sgn}}(\omega) = \frac{2}{i\omega}. \quad (2.26)$$

■

Primjenom spektra funkcije predznak možemo izračunati i spektar funkcije $\frac{1}{t}$ koja će biti jedna od ključnih funkcija u definiciji Hilbertove transformacije i analitičkog signala.

■ **Primjer 2.4 — Spektar signala $\frac{1}{t}$.** U prethodnom primjeru vidjeli smo da je spektar funkcije predznak jednak

$$\widehat{\operatorname{sgn}}(\omega) = \frac{2}{i\omega}. \quad (2.27)$$

Zamijenimo li varijable iz ω u t u toj jednakosti dobit ćemo da je

$$\frac{1}{t} = \frac{i}{2} \widehat{\operatorname{sgn}}(t). \quad (2.28)$$

Spektar signala $\frac{1}{t}$ dan je dvostrukom uzastopnom primjenom Fourierove transformacije na funkciju predznak, tj.

$$\widehat{\frac{1}{t}}(\omega) = \frac{i}{2} \widehat{\widehat{\operatorname{sgn}}}(\omega). \quad (2.29)$$

Dvostruka uzastopna primjena Fourierove transformacije opisana je formulom 2.20 i njena primjena zajedno s prethodno izračunatim spektrom funkcije predznak u 2.26 daje nam spektar funkcije $\frac{1}{t}$

$$\widehat{\frac{1}{t}}(\omega) = \frac{i}{2} \widehat{\widehat{\operatorname{sgn}}}(\omega) = \frac{i}{2} 2\pi \operatorname{sgn}(-\omega) = -i\pi \operatorname{sgn}(\omega). \quad (2.30)$$

■

2.2 Konvolucija i korelacija signala

U većini primjena, a pogotovo u radarskim primjenama, želimo uspoređivati dva signala, poslani i primljeni signal. Upravo je u razlikama primljenog signala u odnosu na poslani signal spremljena informacija o objektu koji promatramo. Ta razlika može se vidjeti u procesu koji zovemo korelacija. Autokorelacija je korelacija signala sa samim sobom. Proces korelacije povezan je s procesom konvolucije dva signala koji vam je bliži iz dosadašnjih kolegija.

Definicija 2.2.1 Neka su u i v realni signali konačne energije. Konvolucija signala u i v je funkcija dana izrazom

$$(u * v)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)v(t - \tau) d\tau. \quad (2.31)$$

Iz definicije konvolucije lako se vidi da je riječ o komutativnoj operaciji. Vrijedi

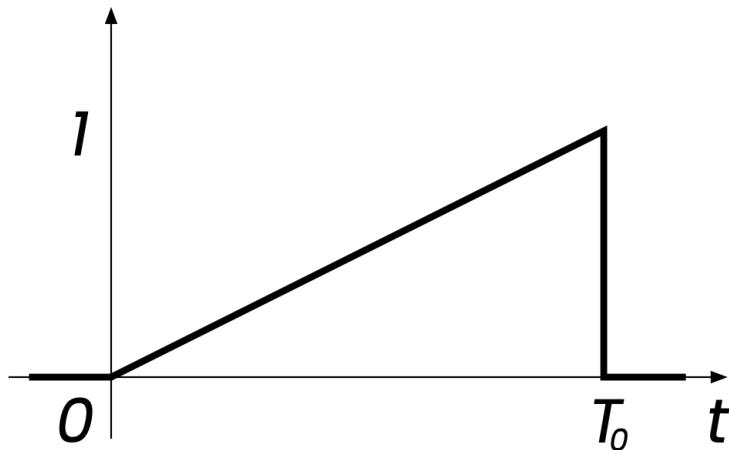
$$\begin{aligned}(u * v)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)v(t - \tau) d\tau = \left| \frac{t - \tau}{d\tau} = dx \right| = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - x)v(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v(x)u(t - x) dx = (v * u)(t).\end{aligned}$$

Konvoluciju dva signala najbolje ćemo upoznati na primjeru.

■ **Primjer 2.5 — Konvolucija pravokutnog impulsa i ograničenog ReLU signala.** Izračunajte konvoluciju pravokutnog signala amplitude 1 trajanja T_0 i ograničenog ReLU signala trajanja T_0 danog formulom

$$\text{ReLU}(t) = \begin{cases} 0, & \text{za } t \leq 0, \\ \frac{t}{T_0}, & \text{za } 0 \leq t \leq T_0, \\ 0, & \text{za } T_0 < t. \end{cases} \quad (2.32)$$

Ograničeni ReLU signal trajanja T_0 možemo vidjeti na slici 2.4.



Slika 2.4: Ograničeni ReLU signal trajanja T_0

U prethodnom primjeru vidjeli smo da konvolucija dva signala daje treći signal koji je dužeg trajanja i po dijelovima je gladi od signala koje konvoluiramo. Riječ je i dalje o signalu konačne energije što znači da možemo izračunati njegov spektar.

Teorem 2.2.1 Neka su u i v realni signali konačne energije. Vrijedi da je

$$\widehat{u * v}(\omega) = \hat{u}(\omega)\hat{v}(\omega). \quad (2.33)$$

Dokaz. U slučaju spektra konvolucije dva signala konačne energije dovoljno je izračunati taj spektar i pri tome koristiti definiciju konvolucije. Primjenom definicije Fourierove transformacije dođemo do izraza

$$\widehat{u * v}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} (u * v)(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)v(t - \tau) d\tau \right) dt. \quad (2.34)$$



Slika 2.5: Konvolucija pravokutnog impulsa i ograničenog ReLU signala

Zamjenom poretku integracije dobijemo izraz

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} v(t - \tau) dt \right) d\tau = \left| \frac{d\tau}{dt} = dx \right| = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(x+\tau)} v(x) dx \right) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) e^{-i\omega\tau} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} v(x) dx \right) d\tau = \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} v(x) dx \right) \\
 &= \hat{u}(\omega) \hat{v}(\omega)
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

■

Spektar konvolucije dva signala jednak je umnošku spektara pojedinih signala. Ovu tvrdnju možemo izreći i na način da Fourierova transformacija prevodi konvoluciju u umnožak. Upravo ovo svojstvo Fourierove transformacije najčešće je korišteno svojstvo u primjenama, pogotovo u primjenama Diskretne Fourierove transformacije i njene bre verzije koju još zovemo i Brza Fourierova transformacija (eng. Fast Fourier Transform ili FFT).

Definicija 2.2.2 Neka su u i v realni signali konačne energije. Korelacija signala u i v je funkcija dana izrazom

$$R_{u,v}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)v(t + \tau) d\tau. \tag{2.36}$$

Autokorelacija signala u korelacija je signala u sa samim sobom

$$R_u(t) = R_{u,u}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t + \tau) d\tau. \tag{2.37}$$

Vidjet ćemo na primjerima da korelacija signala u i v traži sličnosti između signala u i v dok autokorelacija signala u ispituje sličnost signala u sa samim sobom, tj. ispituje samosličnost.

■ **Primjer 2.6 — Korelacija pravokutnog impulsa i ograničenog ReLU signala.** Izračunajte korelaciju pravokutnog signala amplitude 1 i trajanja T_0 i ograničenog ReLU signala trajanja T_0

danog formulom

$$\text{ReLU}(t) = \begin{cases} 0, & \text{za } t \leq 0, \\ \frac{t}{T_0}, & \text{za } 0 \leq t \leq T_0, \\ 0, & \text{za } T_0 < t. \end{cases} \quad (2.38)$$



Slika 2.6: Korelacija pravokutnog impulsa i ograničenog ReLU signala

■ **Primjer 2.7 — Autokorelacija pravokutnog impulsa.** Izračunajte autokorelaciju pravokutnog impulsa amplitude 1 s početkom u $t = 0$ i trajanju T_0 .

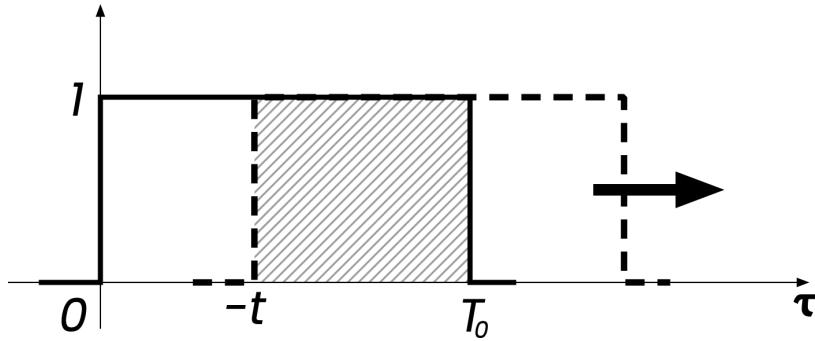
Do autokorelacije signala dolazimo korištenjem izraza za autokorelaciju i pažljivim odabirom područja integracije. Vrijedi da je

$$R_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t+\tau) d\tau. \quad (2.39)$$

Kako je naš signal ograničenog trajanja nema smisla integrirati izvan područja u kojemu se ova dva signala preklapaju jer je izvan tog područja autokorelacija jednaka 0. Područje preklapanja možemo rastaviti na dva slučaja. U jednom je pravokutnik koji pomičemo lijevo od pravokutnika koji stoji i pomicanjem udesno raste površina između ta dva pravokutnika. U drugom slučaju pravokutnik koji se kreće već je prešao maksimalno poklapanje i nastavlja se pomicati udesno. To znači da površina preklapanja pada. Trajanje pravokutnog impulsa jednako je T_0 što znači da se oni počinju preklapati u trenutku kada je početak pravokutnika koji se pomiče pomaknut u trenutak $-T_0$ i poklapaju se do trenutka dok njegov početak ne dođe u trenutak T_0 . To znači da je autokoreacijska funkcija jednaka 0 izvan segmenta $[-T_0, T_0]$ i da na segmentu $[-T_0, 0]$ raste, na segmentu $[0, T_0]$ pada i maksimum postiže u trenutku $t = 0$. Taj maksimum jednak je

$$R_u(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(\tau) d\tau = \int_0^{T_0} d\tau = T_0. \quad (2.40)$$

Na segmentu $[-T_0, 0]$ varijabla t je negativna što znači da smo početak pravokutnika koji se pomiče pomaknuli u točku $\tau = -t \geq 0$. Na slici 2.7 možemo vidjeti da se područje preklapanja nalazi između $\tau = -t \geq 0$ i $\tau = T_0$.



Slika 2.7: Područje preklapanja pravokutnog impulsa u autokorelaciji za $t \in [-T_0, 0]$. Pravokutnik koji pomičemo iscrtan je isprekidanom linijom.

Autokorelacija u tom slučaju iznosi

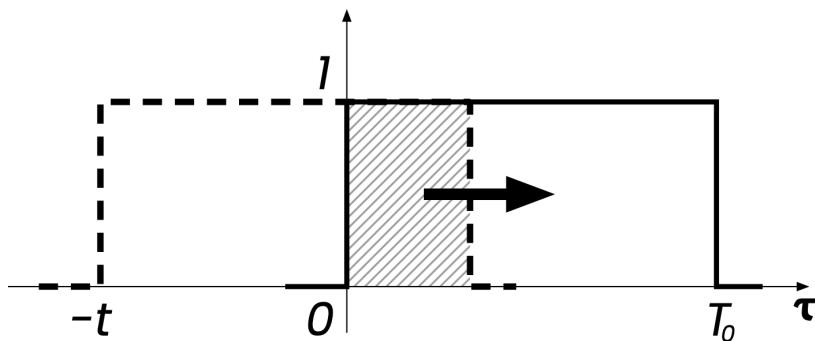
$$R_u(t) = \int_{-t}^{T_0} d\tau = T_0 + t. \quad (2.41)$$

U slučaju kada je varijabla t negativna i kako raste prema $t = 0$ tako raste i područje preklapanja dva pravokutnika čime raste i područje integracije. To znači da za negativne vrijednosti varijable t očekujemo da je autokorelacija rastuća funkcija što smo i dobili računom.

Ako vrijedi da je $0 \leq t \leq T_0$ to znači da smo početak pravokutnika koji pomičemo pomaknuli u $t + \tau = 0$, tj. u točku $\tau = -t \leq 0$. Na slici 2.8 možemo vidjeti da se područje preklapanja nalazi između $\tau = 0$ i $\tau = T_0 - t$. Autokorelacija tada iznosi

$$R_u(t) = \int_0^{T_0-t} d\tau = T_0 - t. \quad (2.42)$$

To je i u skladu s očekivanim rezultatom jer za pozitivne vrijednosti varijable t očekujemo da je autokorelacija padajuća funkcija jer područje preklapanja dva parvokutnika pada kako raste varijabla t .

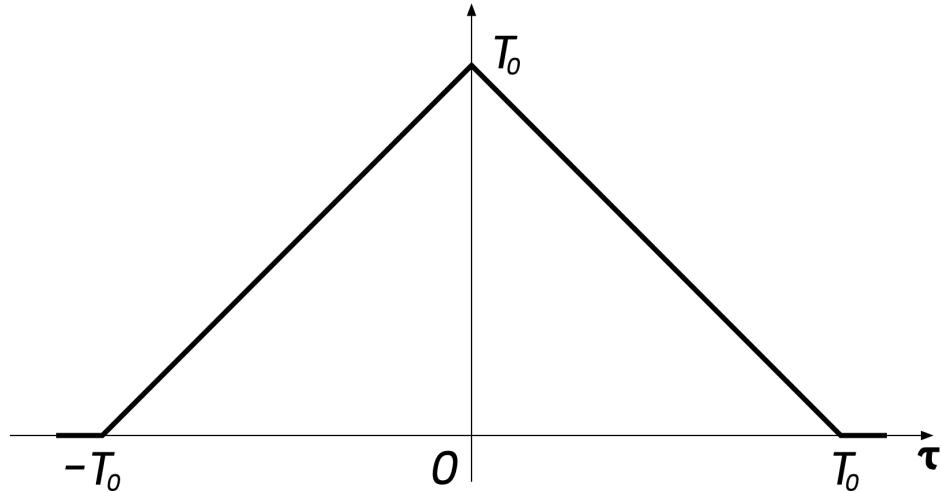


Slika 2.8: Područje preklapanja pravokutnog impulsa u autokorelaciji za $t \in [0, T_0]$. Pravokutnik koji pomičemo iscrtan je isprekidanom linijom.

Autokorelacija pravokutnog signala amplitude 1 i trajanja T_0 jednaka je

$$R_u(t) = \begin{cases} 0, & \text{za } t \leq -T_0, \\ T_0 + t, & \text{za } -T_0 \leq t \leq 0, \\ T_0 - t, & \text{za } 0 \leq t \leq T_0, \\ 0, & \text{za } T_0 \leq t, \end{cases} \quad (2.43)$$

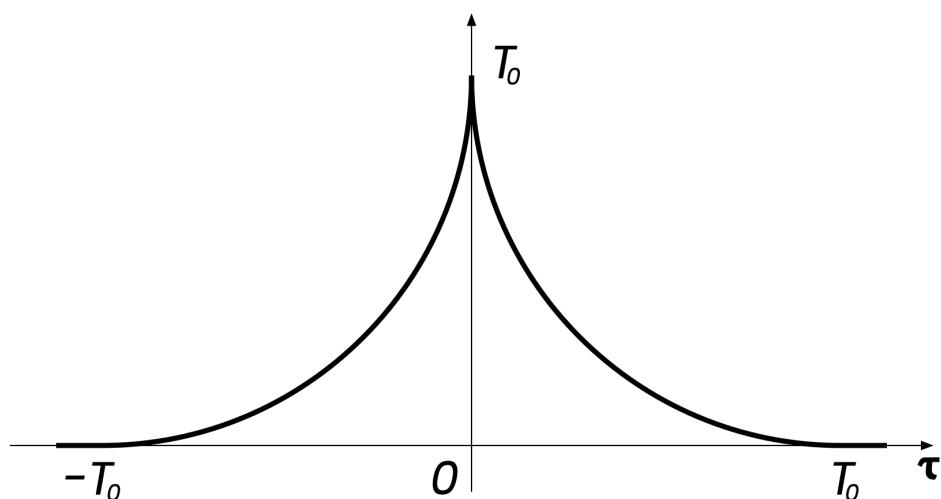
a cijelu funkciju možete vidjeti na slici 2.9.



Slika 2.9: Autoorelacija pravokutnog impulsa applitude 1 i trajanja T_0

■ **Primjer 2.8 — Autoorelacija ograničenog ReLU signala.** Izračunajte autokorelaciju ograničenog ReLU signala iz prethodnih primjera.

...



Slika 2.10: Autoorelacija ograničenog ReLU signala

Iz definicije autokorelacije vidljivo je da je

$$R_u(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(\tau) d\tau \quad (2.44)$$

što je upravo kvadrat energije signala u . Korištenjem Cauch-Schwarzove nejednakosti, koja se u slučaju integrala zove Holderova nejednakost, dobijemo

$$\begin{aligned} |R_u(t)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |u(\tau)u(t+\tau)| d\tau \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} u^2(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t+\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} u^2(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u^2(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(\tau) d\tau = R_u(0). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Dobili smo da je $|R_u(t)| \leq R_u(0)$ što znači da je autokorelacija signala u svakom vremenskom trenutku t manja od autokorelacijske signala u trenutku $t = 0$. Varijabla t u autokorelaciji signala u , jednako kao i u korelacijskoj signala u i v , opisuje pomak jednog signala u odnosu na drugi signal. Interpretirajući varijablu t kao pomak jednog signala u odnosu na drugi očekivano je da je autokorelacija signala u najveća u trenutku $t = 0$, tj. u trenutku kada nema vremenskog pomaka između signala.

Na slici 2.11 možemo vidjeti usporedbu konvolucije i korelacijske na primjeru pravokutnog signala amplitude 1 i trajanja T_0 s ograničenim ReLU signalom trajanja T_0 . Kao što smo i prethodno pokazali, konvolucija je komutativna dok korelacija nije.



Slika 2.11: Usporedba konvolucije i korelacijske pravokutnog impulsa s ograničenim ReLU signalom.

2.3 Osnove Hilbertove transformacije

Hilbertova transformacija je transformacija realnih signala koja se pojavljuje u teoriji obrade signala i u teoriji materijala. Riječ je o singularnom integralu što njenu analizu čini komplikiranijom od analize Fourierove transformacije. Kao i do sada, pretpostavit ćemo da su naši signali dovoljno lijepi da postoji njihova Hilbertova transformacija. Više o singularnim integralima, pravoj vrijednosti integrala, Hilbertovoj i Fourierovoj transformaciji možete pronaći u knjizi *Lectures on Linear Partial Differential Equations* [13].

Definicija 2.3.1 Neka je u realni signal. Hilbertova transformacija signala u realna je funkcija Hu dana izrazom

$$(Hu)(t) = \frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (2.46)$$

Oznaka PV ispred integrala označava pravu vrijednost integrala. Riječ je o načinu rješavanja integrala u kojima se javljaju singulariteti, tzv. nepravih integrala. Standardni nepravi integral sa singularitetom u npr. $t = 0$ koji se nalazi unutar područje integracije $[a, b]$ definiran je kao

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^0 f(t) dt + \int_0^b f(t) dt = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{-\epsilon_1} f(t) dt + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0} \int_{\epsilon_2}^b f(t) dt. \quad (2.47)$$

Imamo dva granična procesa i oni se moraju tretirati odvojeno. Način na koji dolazimo u 0 u prvom integralu nije povezan s načinom na koji se približavamo 0 u drugom integralu. Mali parametri ϵ_1 i ϵ_2 su odvojeni. U procesu koji zovemo prava vrijednost integrala ta dva mala parametra su povezana i prethodni integral računamo na način

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^0 f(t) dt + \int_0^b f(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{-\epsilon} f(t) dt + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^b f(t) dt. \quad (2.48)$$

Zbog simetričnog načina na koji promatramo doprinose u integralu oko točke singulariteta postoji mogućnost da se doprinosi koji divergiraju međusobno ponište.

■ **Primjer 2.9** Izračunajte pravu vrijednost integrala

$$\int_0^4 \frac{1}{3-t} dt. \quad (2.49)$$

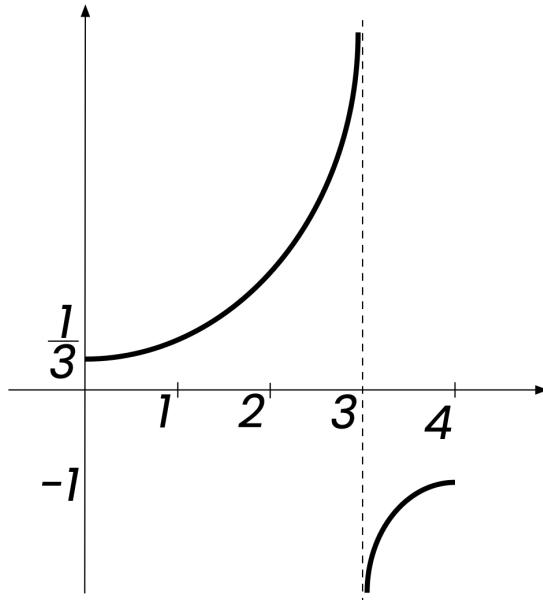
Na slici možemo vidjeti da podintegralna funkcija ima pol u točki $t = 3$. Riječ je o polu prvog reda što nas dovodi do funkcije koju ne možemo integrirati. Krenemo li provoditi proces rješavanja nepravog integrala naići ćemo na

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{1}{3-t} dt &= \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \int_0^{3-\epsilon_1} \frac{1}{3-t} dt + \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0} \int_{3+\epsilon_2}^4 \frac{1}{3-t} dt = \left| \begin{array}{l} \tau = 3-t \\ d\tau = dt \end{array} \right| = \\ &= \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \int_{\epsilon_1}^3 \frac{1}{\tau} d\tau - \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0} \int_{\epsilon_2}^1 \frac{1}{\tau} d\tau = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \ln(\tau) \Big|_3^{\epsilon_1} - \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0} \ln(\tau) \Big|_{\epsilon_2}^1 \\ &= \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \ln\left(\frac{3}{\epsilon_1}\right) - \lim_{\epsilon_2 \rightarrow 0} \ln\left(\frac{1}{\epsilon_2}\right) \end{aligned} \quad (2.50)$$

što je nedefinirani oblik. No, pol prvog reda možemo riješiti korištenjem prave vrijednosti integrala tako da koristimo simetričan granični proces. Dobijemo

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{1}{3-t} dt &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{3-\epsilon} \frac{1}{3-t} dt + \int_{3+\epsilon}^4 \frac{1}{3-t} dt \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\ln(\tau) \Big|_3^\epsilon - \ln(\tau) \Big|_\epsilon^1 \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\ln\left(\frac{3}{\epsilon}\right) - \ln\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln(3) = \ln(3). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Korištenjem simetričnog graničnog procesa međusobno smo poništili doprinose koji divergiraju i dobili konačan broj. ■



Slika 2.12: Graf funkcije $\frac{1}{3-x}$ na segmentu $[0, 4]$. Funkcija ima pol prvog reda u $t = 3$ pa nije integrabilna na segmentu $[0, 4]$.

Dobro pitanje je koji je smisao prave vrijednosti integrala i jedini mogući odgovor na to pitanje je da to nema nekog intrinzičnog smisla jednako kao što i definicija nepravog integrala koju ste do sada vidjeli nema nekog intrinzičnog smisla. Mi smo ti koji dajemo smisao simbolima i postupcima. Promatramo svijet oko sebe i u modeliranju pojava koje promatramo tražimo opravdanje za definicije, simbole i postupke koje provodimo. Recimo da je funkcija f takva da ju možemo rastaviti u Taylorov red u točki $t = 0$. Heuristika nam daje

$$\int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t} dt = f(0) \int_{-1}^1 \frac{1}{t} dt + f'(0) \int_{-1}^1 dt + \frac{f''(0)}{2} \int_{-1}^1 t dt + \dots \quad (2.52)$$

Vidimo da je jedini doprinos koji divergira u prvom članu, ali to je dovoljno da najđemo na singularitet ako $f(0) \neq 0$. Ideja je riješiti se tog prvog člana korištenjem simetričnog graničnog procesa. Lako se vidi da je

$$\text{PV} \int_{-1}^1 \frac{1}{t} dt = 0. \quad (2.53)$$

Korištenjem prave vrijednosti integrala mi smo jednu beznandu situaciju doveli do toga da je možemo izračunati. Ovaj način razmišljanja u fizici se zove renormalizacija. Riječ je o postupku kojim se rješavamo singulariteta u nekim fizikalnim teorijama. Najzanimljivije od svega je da je upravo taj način razmišljanja, eliminacija singulariteta simetrijama iz našeg sustava, riješeni mnogi fizikalni problemi koji su doveli do razvoja Kvantne teorije polja, najsavršenije fizikalne teorije koju poznajemo.

Hilbertovu transformaciju možemo povezati s konvolucijom signala. Iz definicije Hilbertove transformacije vidimo da je

$$(Hu)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{t - \tau} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \frac{1}{t - \tau} d\tau = \left(u * \frac{1}{\pi t} \right)(t). \quad (2.54)$$

U prethodnim oznakama miješamo funkcije i varijable. To možemo izbjegći tako da uvedemo oznaku za funkciju $\frac{1}{\pi t}$, recimo $h_\pi(t) = \frac{1}{\pi t}$. Tada bismo Hilbertovu transformaciju signala u mogli napisati kao

$$(Hu)(t) = (u * h_\pi)(t). \quad (2.55)$$

U nastavku knjige nećemo se zamarati ovim pojedinostima i u konvoluciji ćemo normalno pisati funkciju u i drugu funkciju kao $\frac{1}{\pi t}$ bez obzira što je u prvom slučaju riječ o apstraktnoj funkciji u , a u drugom slučaju radimo s pravilom pridruživanja za funkciju h_π .

Teorem 2.3.1 Neka je u signal konačne energije. Vrijedi da je

$$\widehat{(Hu)}(\omega) = -i\text{sgn}(\omega)\hat{u}(\omega). \quad (2.56)$$

Dokaz. Kao i u većini slučajeva do sada riječ je o računanju Fourierove transformacije korištenjem prethodno dokazanih svojstava. Vrijedi da je

$$\begin{aligned} \widehat{(Hu)}(\omega) &= \widehat{\left(u * \frac{1}{\pi t}\right)}(\omega) \quad \text{Hilbertova transformacija napisana preko konvolucije} \\ &= \frac{1}{\pi} \widehat{\frac{1}{t}}(\omega) \hat{u}(\omega) \quad \text{Fourierova transformacija pretvara konvoluciju u produkt} \\ &= \frac{1}{\pi} (-i\pi\text{sgn}(\omega)) \hat{u}(\omega) \quad \text{Spektar funkcije } \frac{1}{t} \text{ izведен u primjeru 2.4} \\ &= i\text{sgn}(\omega)\hat{u}(\omega). \end{aligned}$$

■

U prethodnom teoremu možemo vidjeti da Hilbertova transformacija signala samo fazno pomiče spektar signala za $\frac{\pi}{2}$. Korištenjem te tvrdnje za očekivati je da nam dvostruka primjena Hilbertove transformacije daje signal fazno pomaknut za π što odgovara množenju signala s -1 . To znači da je Hilbertova transformacija, do na množenje s -1 , inverzna sama sebi.

Teorem 2.3.2 — Inverzna Hilbertova transformacija. Neka je u signal konačne energije. Vrijedi da je

$$(H(Hu))(t) = -u(t). \quad (2.57)$$

Dokaz. U prethodnom teoremu vidjeli smo da je $\widehat{(Hu)}(\omega) = -i\text{sgn}(\omega)\hat{u}(\omega)$. To znači da je

$$(Hu)(t) = (-i\text{sgn}\hat{u})^\vee(t). \quad (2.58)$$

Dvostrukom primjenom iste formule dobijemo

$$(H(Hu))(t) = \left(-i\text{sgn}\widehat{Hu}\right)^\vee(t) = (-i\text{sgn}(-i\text{sgn}\hat{u}))^\vee(t) = -(\text{sgn}\text{sgn}\hat{u})^\vee(t). \quad (2.59)$$

Prodot funkcije predznak sa samom sobom daje 1 pa vrijedi da je

$$(H(Hu))(t) = -(\text{sgn}\text{sgn}\hat{u})^\vee(t) = -(\hat{u})^\vee(t) = -u(t). \quad (2.60)$$

■

Promatramo li Hilbertovu transformaciju kao operator H na prostoru funkcija prethodni teorem govori nam da je $H^2 = -I$ što nam daje inverz Hilbertove transformacije kao operator $H^{-1} = -H$. To znači da izraz za inverznu Hilbertovu transformaciju možemo napisati kao

$$u(t) = (H^{-1}(Hu))(t) = (-H(Hu))(t) = -\frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(Hu)(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (2.61)$$

Time smo, kao i u slučaju Fourierove transformacije, dobili nešto što zovemo Hilbertov par, direktnu i inverznu transformaciju.

Kao i kod Fourierove transformacije željeli bismo znati što se događa ako pokušamo Hilbertovu transformaciju primijeniti na derivaciju funkcije. U spektru Hilbertove transformacije nekog signala vidjeli smo da Hilbertova transformacija fazno pomiče spektar signala za $\frac{\pi}{2}$. To znači da neka svojstva Hilbertove transformacije možemo dobiti promatrajući njen spektar. Vrijedi da je

$$\widehat{Hu'}(\omega) = -i \text{sgn}(\omega) \widehat{u'}(\omega) = -i \text{sgn}(\omega) i \omega \widehat{u}(\omega) = \text{sgn}(\omega) \omega \widehat{u}(\omega). \quad (2.62)$$

S druge strane vrijedi da je

$$\widehat{(Hu')}(\omega) = i\omega \widehat{Hu}(\omega) = i\omega(-i) \text{sgn}(\omega) \widehat{u}(\omega) = \text{sgn}(\omega) \omega \widehat{u}(\omega). \quad (2.63)$$

Gledano na dva različita načina dobili smo jednakost spektara, tj.

$$\widehat{Hu'}(\omega) = \widehat{(Hu')}(\omega). \quad (2.64)$$

Ako signali imaju jednaki spektar onda su i oni sami jednaki, tj. vrijedi da je

$$(Hu)'(t) = (Hu')(t). \quad (2.65)$$

Hilbertova transformacija i derivacija signala komutiraju.

Napomena 2.2 Realni sustavi frekvencijski su ovisni i ta frekvencijska ovisnost zove se disperzija. Svi makroskopski sustavi koje smo do sada upoznali zadovoljavaju svojstvo kauzalnosti i vjerujemo općenito da su svi makroskopski sustavi kauzalni. To znači da u takvima sustavima uzrok dolazi prije posljedice. Kauzalnost mora biti ugrađena u prijenosne funkcije takvih sustava. Kako bi kauzalnost bila zadovoljena realni i imaginarni dio prijenosne funkcije moraju biti povezani Hilbertovom transformacijom. U teoriji sustava tu vezu zovemo Kramers-Kronigovi uvjeti. ■

2.4 Što je analitički signal?

Za kompleksne funkcije definirane su određene simetrije koje uključuju proces konjugiranja. Konjugirano kompleksan broj \bar{z} broja $z = x + iy$ jednak je $\bar{z} = x - iy$. Vidjet ćemo da spektar realnog signala zadovoljava neke simetrije koje nam u praksi olakšavaju računanje spektra i spremanje spektra realnog signala u memoriju.

Definicija 2.4.1 Za kompleksnu funkciju $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ kažemo da je hermitska ili da zadovoljava hermitsku simetriju ako vrijedi da je

$$g(-t) = \bar{g}(t), \quad (2.66)$$

a kažemo da je antihermitska ako vrijedi da je

$$g(-t) = -\bar{g}(t). \quad (2.67)$$

Poznato je da se ista svojstva zovu različitim imenima u različitim strukama. Tako se hermitski signal u fizici zove PT simetričan signal. Svojstvo da je funkcija hermitska je na neki način generalizacija svojstva parnosti i neparnosti kod realnih funkcija realne varijable. Za realne signale vrijedi da ih možemo rastaviti na parni i neparni dio na način da je početni signal jednak zbroju svog parnog i neparnog dijela,

$$u(t) = u_p(t) + u_n(t).$$

Parni dio signala definiran je kao

$$u_p(t) = \frac{u(t) + u(-t)}{2}, \quad (2.68)$$

dok je neparni dio signala definiran kao

$$u_n(t) = \frac{u(t) - u(-t)}{2}. \quad (2.69)$$

Na isti način svaku kompleksnu funkciju realne varijable $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ možemo rastaviti na hermitski i antihermitski dio kao $g(t) = g_h(t) + g_a(t)$. Hermitski dio funkcije jednak je

$$g_h(t) = \frac{g(t) + \bar{g}(-t)}{2}, \quad (2.70)$$

dok je antihermitski dio jednak

$$g_a(t) = \frac{g(t) - \bar{g}(-t)}{2}. \quad (2.71)$$

Za hermitsku funkciju $g(t) = u(t) + iv(t)$ vrijedi da je njen realni dio parna funkcija dok je njen imaginarni dio neparna funkcija. To možemo vidjeti direktno iz definicije hermitičnosti. Iz jednakosti

$$g(-t) = \bar{g}(t) \quad (2.72)$$

slijedi da je

$$u(-t) + iv(-t) = u(t) - iv(t), \quad (2.73)$$

tj. vrijedi da je $u(t) = u(-t)$ dok je $v(-t) = -v(t)$.

■ **Primjer 2.10 — Hermitska funkcija.** Najjednostavnija hermitska funkcija je polinom prvog stupnja, tj. $g(t) = it$. Lako se vidi da je $g(-t) = i(-t) = -it = \bar{it} = \bar{g}(t)$. Nešto komplificiraniji primjer možemo dobiti kombiniranjem polinoma prvog i drugog stupnja, npr. $g(t) = t^2 + it$. ■

Spektar signala kompleksna je funkcija realne varijable jer je kružna frekvencija ω realna varijabla dok je spektar kompleksna funkcija.

Teorem 2.4.1 Signal u je realan ako i samo ako je njegov pripadni spektar \hat{u} hermitska funkcija.

Dokaz. Tvrđnja se sastoji od dva smjera. Prvo ćemo dokazati da ako je signal u realan da je tada spektar hermitska funkcija. Vrijedi

$$\hat{u}(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(-\omega)t} u(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} u(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{e^{-i\omega t}} u(t) dt. \quad (2.74)$$

Korištenjem informacije da je u realan signal možemo kompleksno konjugiranje povući i na signal u jer to ne mijenja vrijednost integrala. Dobijemo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{e^{-i\omega t} u(t)} dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u(t) dt} = \bar{u}(\omega), \quad (2.75)$$

tj. spektar realnog signala hermitska je funkcija.

U obratu koristimo Inverznu Fourierovu transformaciju i pretpostavku da je spektar hermitski. Vrijedi da je

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{2\pi} \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{u}(\omega) d\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{e^{i\omega t} \hat{u}(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \hat{u}(-\omega) d\omega. \quad (2.76)$$

Zamjenom varijabli $\tilde{\omega} = -\omega$ dobijemo

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} e^{i\tilde{\omega} t} \hat{u}(\tilde{\omega}) (-d\tilde{\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tilde{\omega} t} \hat{u}(\tilde{\omega}) d\tilde{\omega} = u(t). \quad (2.77)$$

Vidimo da je $\bar{u} = u$, tj. signal u je realan. ■

Prvi dio teorema je bitniji u primjenama. Iz njega možemo zaključiti da u dijeli spektra koji odgovara negativnim frekvencijama nema ništa novo, ništa što već nismo vidjeli u dijelu spektra koji odgovara pozitivnim frekvencijama. Taj dio spektra je redundanat jer ne nosi nikakvu novu informaciju i možemo ga rekonstruirati iz drugog dijela spektra. To što je spektar realnog signala hermitska funkcija direktno se očituje pri korištenju diskretnе Fourierove transformacije na računalu. Nećemo ovdje ulaziti u neku širu raspravu o diskretnoj Fourierovoj transformaciji, ali uzmite kao činjenicu da diskretna Fourierova transformacija direktog signala koji se sastoji od n uzoraka ima $2n$ spektralnih komponenti. Prethodno svojstvo omogućuje nam da n spektralnih komponenti koje su povezane s negativnim frekvencijama rekonstruiramo iz n spektralnih komponenti koje odgovaraju pozitivnim frekvencijama. To nam omogućuje nam da spektar diskretnog signala spremimo u jednaku količinu memorije kao i signal čiji spektar smo računali.

Napomena 2.3 Upravo zbog ove redundancije uveden je pojam analitičkog signala. Ideja je odbaciti dio spektra koji odgovara negativnim kružnim frekvencijama i raditi s kompleksnim signalom. Na kraju, nakon što sve izračunamo, samo odbacimo imaginarni dio spektra. ■

Realni signal $u(t)$ želimo prikazati pomoću trenutne amplitute $a(t)$, trenutne faze $\varphi(t)$ i trenutne frekvencije $\omega(t) = \varphi'(t)$ koji su izvedeni iz našeg signala u . Odabir tih parametara omogućuje nam da početni signal u prikažemo u obliku

$$u(t) = a(t) \cos(\varphi(t)). \quad (2.78)$$

Ideja je koristiti kompleksificirani prikaz $z(t)$ početnog signala $u(t)$ takav da je realni dio kompleksificiranog prikaza upravo jednak našem početnom signalu $u(t)$. Problem je što za dani realni signal $u(t)$ postoji mnoštrova različitih trenutnih amplituda $a(t)$ i trenutnih faza $\varphi(t)$ takvih da je $u(t) = a(t) \cos(\varphi(t))$. Za različite funkcije $v(t)$ možemo napisati kompleksificirani oblik $z(t) = u(t) + iv(t)$ i za taj kompleksificirani oblik pronaći trenutnu amplitudu $a(t) = \sqrt{u^2(t) + v^2(t)}$ i trenutnu fazu $\varphi(t) = \arctan \frac{v(t)}{u(t)}$. Problem pronalsaka odgovarajućeg imaginarnog dijela v riješio je Gabor Denesz uvođenjem pojma analitički signal

Teorem 2.4.2 — Spektar analitičkog signala. Neka je u realni signal konačne energije te neka je $z(t) = u(t) + i(Hu)(t)$ njegov pripadni analitički signal. Vrijedi da je

$$\hat{z}(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{za } \omega < 0, \\ \hat{u}(\omega), & \text{za } \omega = 0, \\ 2\hat{u}(\omega), & \text{za } \omega > 0. \end{cases} \quad (2.79)$$

Dokaz. Vrijedi da je

$$\begin{aligned} \hat{z}(\omega) &= \hat{u}(\omega) + i\widehat{Hu}(\omega) \quad \text{Linearnost Fourierove transformacije} \\ &= \hat{u}(\omega) + i\left(u * \frac{1}{\pi t}\right)(\omega) \quad \text{Zapis Hilbertove transformacije preko konvolucije} \\ &= \hat{u}(\omega) + \frac{i}{\pi} \hat{u}(\omega) \frac{\widehat{1}}{t}(\omega) \quad \text{Spektar konvolucije jednak je umnošku spektara} \\ &= \hat{u}(\omega) + \frac{i}{\pi} (-i\pi \operatorname{sgn}(\omega)) \hat{u}(\omega) \quad \text{Spektar funkcije } \frac{1}{t} \text{ izведен u primjeru 2.4} \\ &= \hat{u}(\omega) (1 + \operatorname{sgn}(\omega)). \end{aligned}$$

Iz definicije funkcije predznak vidljivo je

$$1 + \operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{za } \omega < 0, \\ 1, & \text{za } \omega = 0, \\ 2, & \text{za } \omega > 0, \end{cases} \quad (2.80)$$

što nam daje spektar analitičkog signala. ■

Analitički signal je upravo ono što tražimo. Njegov spektar jednak je 0 za negativne frekvencije, a spektralne komponente koje odgovaraju pozitivnim kružnim frekvencijama imaju dvostruku amplitudu.

Teorem 2.4.3 — Bedrosian. Neka su u i v signali konačne energije takvi da je $\hat{u}(\omega) = 0$ za $|\omega| > \omega_0$, a $\hat{v}(\omega) = 0$ za $|\omega| < \omega_0$. Tada je

$$(H(uv))(t) = u(t)(Hv)(t). \quad (2.81)$$

Ako imamo produkt dva signala čiji se spektri ne preklapaju onda Hilbertovu transformaciju njihovog umnoška možemo odrediti puno jednostavnije.

■ **Primjer 2.11 — Hilbertova transformacija moduliranog signala.** Izračunajte Hilbertovu transformaciju signala $u(t) = a(t) \cos(\omega_0 t)$ kod kojega je frekvencija titranja ω_0 veća od najveće frekvencije u spektru trenutne amplitude $a(t)$.

Imamo produkt dva signala čiji spektri se ne poklapaju. To znači da Direktnom primjenom Bedrosianovog teorema možemo signal trenutne amplitude $a(t)$ izvaditi ispred Hilbertove transformacije

$$(H(a(t) \cos(\omega_0 t)))(t) = a(t)(H \cos(\omega_0 t))(t) = a(t) \sin(\omega_0 t). \quad (2.82)$$

Analitički signal dobiven iz signala u jednak je

$$z(t) = a(t) \cos(\omega_0 t) + a(t) \sin(\omega_0 t) = a(t) e^{i\omega_0 t}. \quad (2.83)$$

Signal ovog oblika zovemo fazor. ■

2.5 IQ postupak

IQ postupak je postupak kojim iz danog signala u generiramo analitički signal. Taj postupak poznat je i pod imenom kvadraturna modulacija. Postupak se temelji na direktnoj primjeni Bedrosianovog teorema. Sustav u kojem se provodi IQ postupak zovemo IQ modulator.

3. Asimptotska aproksimacija integralnih funkcija

Linearne vremenski invarijantni sustavi su sustavi čiji se parametri s vremenom ne mijenjaju. Matematički modeli takvih sustava dani su diferencijalnim jednadžbama s konstantnim koeficijentima. Obično na takve modele primjenjujemo integralne transformacije kao što su Laplaceova i Fourierova transformacija. Vidjeli smo već da Fourierova transformacija pretvara derivaciju funkcije u množenje funkcije varijablom. Ideja je primijeniti transformaciju na model, riješiti dobiveni model koji je jednostavniji od početnog modela i onda primijeniti inverznu transformaciju. U praksi je često nemoguće primijeniti transformaciju pa pribjegavamo asimptotskim aproksimacijama. Više o teoriji u pozadini asimptotskih aproksimacija integralnih funkcija možete pronaći u knjizi Applied Asymptotic Analysis [2] u kojoj je dana rigorozna analiza metoda i primjena u rješavanju problema dаниh običnim i parcijalnim diferencijalnim jednadžbama. U kratkoj knjižici Perturbation Methods [1] ukratko su objašnjene sve metode s nizom dobrim primjera. Detaljna analiza specijalnih funkcija do kojih dolazimo rješavanjem diferencijalnih jednadžbi integralnim transformacijama dana je u knjizi Asymptotic Analysis of Differential Equations [6]. Navedena knjiga bazira se na intuitivnom shvaćanju problema i argumenata i prilagođena je studentima tehničkih znanosti. Na YouTubeu se mogu naći predavanja iz asimptotskih metoda od kojih su najkompletnija i najjasnija predavanja Asymptotics and perturbation methods profesora Stevena Strogatza, jednog od najvećih živućih primijenjenih matematičara [5]. Ovo poglavlje bazirano je na poglavljima i primjerima iz navedenih izvora.

3.1 Primjena integralnih transformacija na linearne sustave

U ovom poglavlju vidjet ćemo dva primjera linearnih sustava na koje ćemo primijeniti integralne transformacije. Vidjeli smo već da Fourierovu transformaciju možemo primijeniti

- **Primjer 3.1 — Schrodingerova jednadžba s linearnim potencijalom.** Pronađite funkciju u koja zadovoljava običnu diferencijalnu jednadžbu s linearnim potencijalom čije rješenje trne prema

beskonačnosti

$$\begin{cases} u''(x) - xu = 0, \text{ za } x \in \mathbb{R}, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Dani model je linearan, nema konstantne koeficijente, ali koeficijent je polinom prvog stupnja što se lako može povezati s Fourierovom transformacijom. Fourierova transformacija ne zna interpretaciju varijabli koje se javljaju u funkcijama, ali mi obično u ovisnosti o tome što varijable predstavljaju mijenjamo varijable spektra. U slučaju kada se u jednadžbi javlja vrijeme t interpretacija varijable u transformiranoj funkciji je kružna frekvencija $\omega = \frac{2\pi}{t}$. U slučaju kada varijabla u modelu opisuje prostor, što obično označavamo varijablom x , onda za varijablu u transformiranoj funkciji koristimo valni broj $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ gdje je λ valna duljina vala. U oba slučaja vidimo da je dimenzija varijable u transformiranoj funkciji inverzna varijabli u početnoj funkciji. Fourierovu transformaciju u tom slučaju pišemo kao

$$\hat{u}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(x) dx, \quad (3.2)$$

dok inverznu transformaciju označavamo

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{u}(k) dk. \quad (3.3)$$

U svojstvima Fourierove transformacije dokazali smo da je spektar derivacije jednak umnošku spektra i transformirane varijable, $\hat{u}'(k) = ik\hat{u}(k)$ dok je spektar umnoška varijable i signala dan derivacijom spektra, $\hat{x}\hat{u}(k) = i\hat{u}'(k)$. Primjenom Fourierove transformacije na jednadžbu dobijemo

$$(ik)^2 \hat{u}(k) - i\hat{u}'(k) = 0 \quad (3.4)$$

što nas vodi na separabilnu običnu diferencijalnu jednadžbu

$$\hat{u}'(k) = ik^2 \hat{u}(k). \quad (3.5)$$

Primjenom metode separacije varijabli dobijemo oblik jednadžbe

$$\frac{d\hat{u}}{\hat{u}} = ik^2 dk \quad (3.6)$$

čije je rješenje jednako

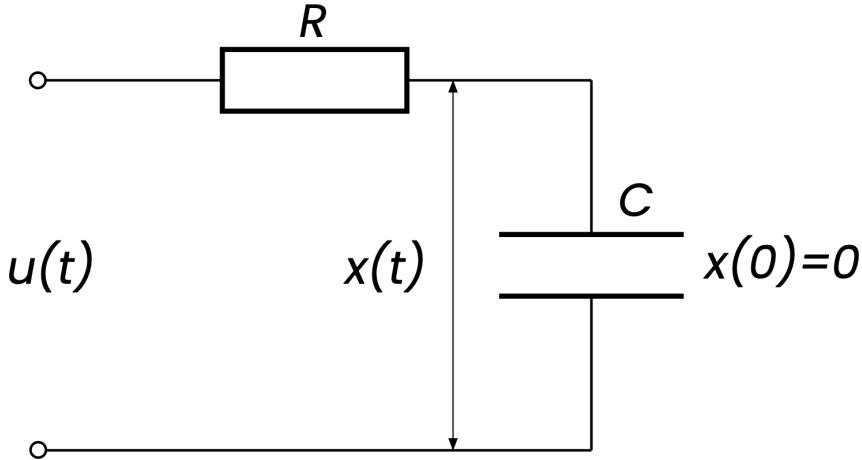
$$\hat{u}(k) = Ce^{ik^3} \quad (3.7)$$

za neku konstantu $C \in \mathbb{R}$.

To rješenje nije rješenje našeg početnog problema nego je to spektar početnog problema. Kako bismo dobili rješenje u realnom prostoru, a ne u domeni transformacije moramo primijeniti inverznu Fourierovu transformaciju. Primjenom inverzne transformacije dobijemo integralnu funkciju

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{u}(k) dk. = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kx + \frac{k^3}{3})}. \quad (3.8)$$

Rješenje dobiveno Fourierovom transformacijom tj. integralnu funkciju koja opisuje rješenje u ne možemo izraziti elementarnim funkcijama. Ovako dana integralna funkcija, za $C = 1$, zove se Airyeva funkcija. Više o njoj možete pronaći u knjizi Asymptotic Analysis of Differential Equations [6]. ■



Slika 3.1: RC strujni krug

■ **Primjer 3.2 — RC strujni krug.** Pronađite napon na kondenzatoru za RC strujni krug sa slike 3.1 za koji je početni napon na kondenzatoru jednak 0.

Napon na kondenzatoru možemo označiti funkcijom $x(t) = u(t) - u_R(t)$ gdje je napon na na otporniku dan izrazom

$$u_R(t) = i(t)R = Cx'(t)R = RCx'(t). \quad (3.9)$$

Drugi Kirchoffov zakon kaže da je napon izvora jednak sumi svih padova napona, $u(t) = u_R(t) + x(t)$ što nam daje matematički model opisane situacije

$$\begin{cases} RCx'(t) + x(t) = u(t), & \text{za } t > 0, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Dani model redovito se rješava primjenom Laplaceove transformacije

$$(\mathcal{L}x)(s) = X(s) = \int_0^\infty e^{-st}x(t)dt. \quad (3.11)$$

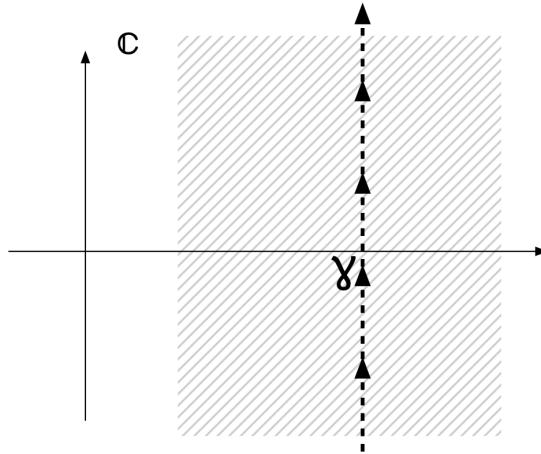
koja je definirana za sve funkcije najviše eksponencijalnog rasta. Teorija Laplaceove transformacije, jednako kao i teorija Fourierove transformacije dana je...

Primjenom Laplaceove transformacije na derivaciju funkcije dobijemo

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}x')(s) &= \int_0^\infty e^{-st}x'(t)dt = \left| \frac{f}{df} = e^{-st} \quad dg = x'(t)dt}{df = -se^{-st}dt \quad g = x(t)} \right| = \\ &= x(t)e^{-st} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-se^{-st})u(t)dt = -x(0) + s \int_0^\infty e^{-st}x(t)dt = sX(s) - x(0) \end{aligned} \quad (3.12)$$

i tu formulu možemo primijeniti na naš matematički model RC kruga. Dobijemo linearnu jednadžbu

$$RC(sX(s) - x(0)) + X(s) = U(s), \quad (3.13)$$



Slika 3.2: Područje konvergencije Laplaceove transformacije i krivulja integracije za inverznu transformaciju

što nam daje izraz za spektar rješenja

$$X(s) = \frac{U(s)}{1 + sRC}. \quad (3.14)$$

U ovisnosti o obliku pobude $u(t)$ i pripadnog Laplaceovog spektra $U(s)$ dani oblik može se invertirati korištenjem poznatih Laplaceovih parova ili korištenjem Mellinovog izraza za inverz Laplaceove transformacije

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} X(s) ds \quad (3.15)$$

za bilo koji $\gamma \in \mathbb{R}$ takav da je krivulja integracije unutar područja konvergencije spektra $X(s)$. Krivulja integracije prikazana je na slici 3.2.

Kao i u prethodnom primjeru, ovaj integral najčešće nije moguće riješiti u praksi pa pribjegavamo asimptotskim aproksimacijama. ■

Prethodna dva primjera mogu se generalizirati u općeniti problem u kojemu se javljaju valovi. Val je poremećaji koji se širi u prostoru i vremenu što znači da je matematički model koji opisuje valnu pojavu dan diferencijalnom jednadžbom u kojoj je opisana promjena po obje varijable. Takve jednadžbe zovemo parcijalne diferencijalne jednadžbe.

■ **Primjer 3.3 — Disperzivne valne pojave.** Prostorno jednodimenzionalan linearan evolucijski problem modeliramo jednadžbom oblika

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=0}^N a_n \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \quad (3.16)$$

gdje koeficijenti a_n opisuju različite efekte koji se javljaju u procesu gibanju vala kao što su prigušenje, brzina vala i slično. Za potpuni opis valnih pojava u slobodnom prostoru potreban nam je još i početni uvjet, početna konfiguracija valog poremećaja koju standardno označavamo $u(t=0, x) = u_0(x)$. U početnom uvjetu spremljena je i početna energija koju smo unijeli u sustav.

Probleme ovog tipa rješavat ćemo primjenom Fourierove transformacije. Ako je rješenje u našeg problema glatko i ako dovoljno brzo trne tada ga možemo prikazati pomoću spektra \hat{u}

dobivenog Fourierovom transformacijom

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{u}(k, t) dk. \quad (3.17)$$

U ovom obliku tražimo rješenja našeg problema. Spektar početnog uvjeta označavat ćeemo \hat{u}_0 . Uvrštanjem oblika rješenja u početni model te primjenom svojstava Fourierove transformacije dobijemo jednadžbu

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \left(\frac{\partial \hat{u}(k, t)}{\partial t} - \sum_{n=0}^N a_n(ik)^n \hat{u}(k, t) \right) dk = 0. \quad (3.18)$$

Možemo zaključiti kako je spektar jednak nuli što nas vodi na običnu diferencijalnu jednadžbu koja opisuje vremensku evoluciju spektra \hat{u}

$$\frac{\partial \hat{u}(k, t)}{\partial t} = \hat{u}(k, t) \sum_{n=0}^N a_n(ik)^n. \quad (3.19)$$

Desnu stranu prethodne jednadžbe zovemo disperzijska funkcija ili češće disperzijska relacija

$$\omega(k) = i \sum_{n=0}^N a_n(ik)^n. \quad (3.20)$$

Korištenjem disperzijske funkcije vremensku evoluciju spektra možemo jednostavnije napisati u obliku

$$\frac{\partial \hat{u}(k, t)}{\partial t} = -i\omega(k)\hat{u}. \quad (3.21)$$

iz kojeg se odmah vidi da je riječ o separabilnoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi čije je rješenje dano funkcijom

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}_0(k) e^{-i\omega(k)t}. \quad (3.22)$$

Kao i u prethodnim primjerima, rješenje početnog problema u realnom prostoru i vremenu dobijemo primjenom inverzne Fourierove transformacije na spektar rješenja. Tada je rješenje oblika

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kx - \omega(k)t)} \hat{u}_0(k) dk. \quad (3.23)$$

Rješenje možemo interpretirati kroz spektar početnog uvjeta jer je promjena rješenja dana vremenskom evolucijom spektra početnog uvjeta, tj. konfiguracije vala koju smo na početku unijeli u naš sustav. ■

U prethodna tri primjera vidjeli smo da se rješenje problema javlja u obliku integralne funkcije s nekim parametrima. Problem je što u praksi tako dobivene integralne funkcije nije moguće izraziti preko elementarnih funkcija pa pribjegavamo asimptotskim aproksimacijama tih funkcija. U primjerima se redovito javljaju parametri koje možemo interpretirati kao prostornu varijablu x ili vrijeme t što nam daje mogućnost da promatramo rješenje u dalekom polju, kada $|x| \rightarrow \infty$ ili dugoročno ponašanje, tj. ponašanje rješenja za $t \rightarrow \infty$. Oba ova slučaja mogu se opisati integralnom funkcijom oblika

$$F(\lambda) = \int_{\Gamma} e^{\lambda h(z)} g(z) dz, \quad (3.24)$$

gdje je krivulja Γ neka krivulja u kompleksnoj ravnini, funkcije h i g su analitičke funkcije, a parametar λ je realan parametar. Nas će zanimati aproksimacija ovakvih integralnih funkcija u slučaju kada $\lambda \rightarrow \infty$.

Analitička funkcija je ona kompleksna funkcija koja je dana redom potencija. Holomorfna funkcija je ona kompleksna funkcija koja ima kompleksnu derivaciju. Svojstvo holomorfnosti, tj. postojanje kompleksne derivacije provjeravamo uvjetima iz sljedećeg teorema.

Teorem 3.1.1 — Cauchy-Riemannovi uvjeti. Neka je $h(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ holomorfna funkcija. Tada njen realni dio u i njen imaginarni dio v imaju prve parcijalne derivacije i one zadovoljavaju Cauchy-Riemannove uvjete

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.25)$$

Ako realni dio u i imaginarni dio v kompleksne funkcije h imaju neprekidne prve parcijalne derivacije koje zadovoljavaju Cauchy-Riemannove uvjete onda je funkcija h holomorfna.

Vidimo da nam je sa provjeru holomorfnosti funkcije h dovoljno provjeriti Cauchy-Riemannove uvjete u slučaju da su prve parcijalne derivacije realnog i imaginarnog dijela funkcije h neprekidne. Jedan od glavnih teorema kompleksne analize kaže da su holomorfne funkcije isto što i analitičke funkcije. To znači da ako kompleksna funkcija h ima kompleksnu derivaciju prvog reda da automatski ima i kompleksnu derivaciju svakog reda i da se može prikazati redom potencija. Ovo svojstvo nemaju realne funkcije realne varijable jer vrlo jednostavno možemo zadati relanu funkciju koju možemo derivirati samo jednom. Iako to svojstvo djeluje pomalo nevjerojatno i neočekivano zapravo nije riječ o ničem magičnom. Iz Cauchy-Riemannovih uvjeta može se pokazati da realni i imaginarni dio kompleksne funkcije zadovoljavaju Laplaceovu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad \text{na } \mathbb{R}^2 \quad (3.26)$$

što nam daje vrlo jake uvjete na regularnost funkcija u i v . U većini knjiga o parcijalnim diferencijskim jednadžbama, npr. u Partial Differential Equations [14] možete pronaći dokaz da su rješenja Laplaceove jednadžbe beskonačno glatka i da imaju rastav u red.

Analitičke funkcije imaju mnoga lijepa svojstva. Vrijedi da im je integral po svakoj zatvorenoj krivulji jednak nula, tj. neka je $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analitička funkcija i neka je Γ zatvorena krivulja. Vrijedi da je

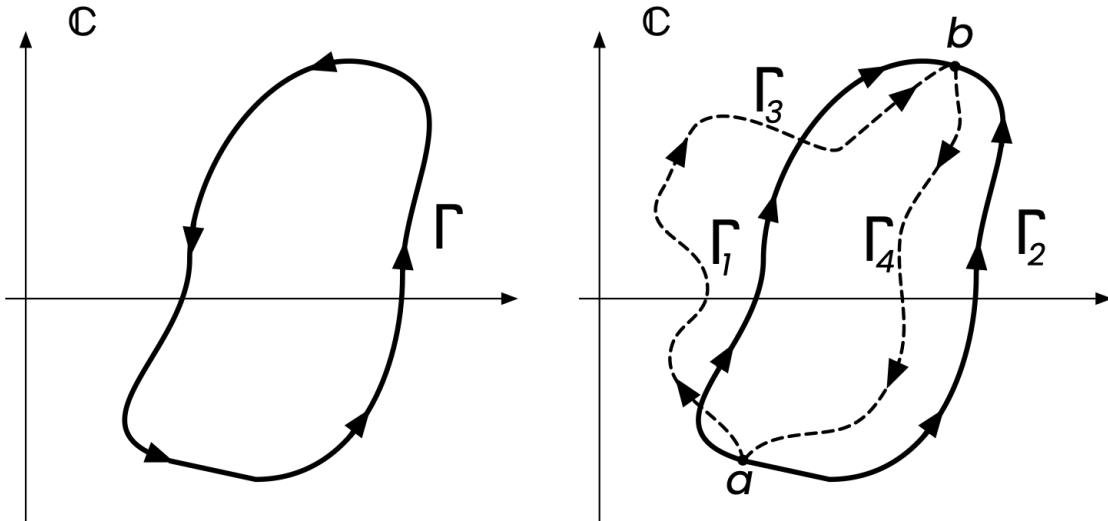
$$\oint_{\Gamma} h(z) dz = 0. \quad (3.27)$$

Lijep dokaz i grafičko objašnjenje te tvrdnje možete pronaći u knjizi Visual Complex Analysis [3].

Ova činjenica omogućuje nam da biramo onu krivulju po kojoj integriramo koja nam najviše odgovara, tj. onu koja ili ima neka posebna svojstva ili je integracija po njoj jednostavnija. Na slici 3.3 možemo vidjeti različite krivulje po kojima možemo integrirati analitičku funkciju h i dobiti isti rezultat. Vrijedi da je

$$\int_{\Gamma_1} h(z) dz = \int_{\Gamma_2} h(z) dz = \int_{\Gamma_3} h(z) dz = - \int_{\Gamma_4} h(z) dz. \quad (3.28)$$

Krivulja Γ_4 ide u obrnutom smjeru pa je vrijednost integrala na njoj suprotnog predznaka u odnosu na preostale 3 krivulje.

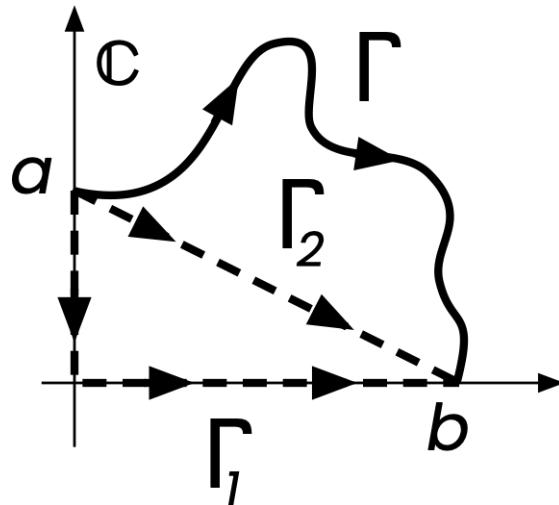


Slika 3.3: Zatvorena krivulja Γ na kojoj integriramo analitičku funkciju h . Želimo li integrirati istu funkciju od točke a do točke b možemo ići bilo kojoj krivulji koja povezuje te dvije točke.

■ **Primjer 3.4 — Dva različita puta po kojima integriramo funkciju** $h(z) = z$. Izračunajte integral

$$\int_{\Gamma} z dz. \quad (3.29)$$

po krivulji koja spaja točke $a = 0 + 1i$ i $b = 2 + 0i$. Krivulju integracije možete vidjeti na slici 3.4.



Slika 3.4: Dvije moguće krivulje integracije od točke $a = 0 + 1i$ do točke $b = 2 + 0i$.

Funkciju $h(z) = z$ možemo prikazati preko njenog realnog i imaginarnog dijela kao $h(z) = x + iy$. Lako vidimo da njen realni i imaginarni dio imaju neprekidne parcijalne derivacije koje zadovoljava Cauchy-Riemannove uvjete. To znači da je funkcija $h(z) = z$ holomorfna što je isto što i analitička funkcija. Zato što je funkcija analitička ne moramo je od točke $a = 0 + 1i$ do točke $b = 2 + 0i$ integrirati po komplikiranoj krivulji Γ nego možemo odabrati bilo koju krivulju koja spaja te dvije

točke. To vrijedi zato što je

$$\oint_{\Gamma_1 - \Gamma} z dz = 0 \quad (3.30)$$

što nam daje jednakost integrala

$$\int_{\Gamma} z dz = \int_{\Gamma_1} z dz + \int_{\Gamma_2} z dz. \quad (3.31)$$

Krivulju Γ_2 možemo parametrizirati kao $z(t) = x(t) + iy(t)$ gdje je taj pravac dan formulom $y = -\frac{x}{2} + 1$. Koristimo li za varijablu x parametrizaciju $x(t) = t$ tada je $y(t) = -\frac{t}{2} + 1$ što nam daje funkciju

$$z(t) = t - i\frac{t}{2} + i = t \left(1 - \frac{i}{2}\right) + i \quad (3.32)$$

i diferencijal

$$dz = \left(1 - \frac{i}{2}\right) dt. \quad (3.33)$$

Integral tada postaje

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} z dz &= \int_0^2 \left(t \left(1 - \frac{i}{2}\right) + i\right) \left(1 - \frac{i}{2}\right) dt = \left(1 - \frac{i}{2}\right)^2 \int_0^2 t dt + i \left(1 - \frac{i}{2}\right) \int_0^2 dt \\ &= \left(1 - \frac{i}{2}\right) (2 - i + 2i) = (2 + i) \left(1 - \frac{i}{2}\right) = \frac{5}{2}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Krivulju Γ_1 možemo podijeliti na dva dijela od kojih je jedan dio na osi y od točke $y = 1$ do točke $y = 0$ dok se drugi dio na osi x i to od točke $x = 0$ do točke $x = 2$. Parametrizacija je sada vrlo jednostavna pa naši integrali postaju

$$\int_{\Gamma_1} z dz = \int_1^0 iy dy + \int_0^2 x dx = \int_0^1 y dy + \int_0^2 x dx = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}. \quad (3.35)$$

Vidimo da izbor krivulje po kojoj integriramo uvelike mijenja kompleksnosti parametrizacije i podintegralnu funkciju na odabranoj parametrizaciji čime integral koji rješavamo može postati laksi ili teži. ■

3.2 Krivulja najbržeg spusta

U ovom poglavlju promatrat ćemo integralne funkcije oblika

$$F(\lambda) = \int_{\Gamma} e^{\lambda h(z)} g(z) dz. \quad (3.36)$$

u kojima je integral definiran po krivulji $\Gamma \in \mathbb{C}$. Krivulju ćemo parametrizirati parametrom t što nam točke na krivulji Γ daje u obliku $z(t) = x(t) + iy(t)$. Tada funkciju $h(z)$ možemo rastaviti na njen realni i imaginarni dio $h(z) = R(z) + iI(z)$ što primjenom parametrizacije pišemo kao

$$h(x(t), y(t)) = R(x(t), y(t)) + iI(x(t), y(t)). \quad (3.37)$$

Uvrstimo li navedene parametrizacije u integralnu funkciju F dobijemo

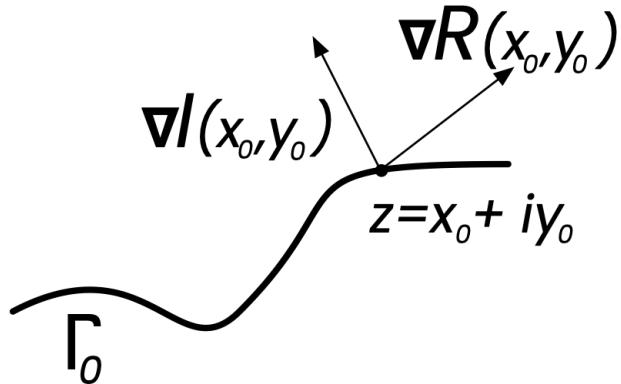
$$F(\lambda) = \int_{t_a}^{t_b} e^{\lambda[R(x(t),y(t))+iI(x(t),y(t))]} g(z(t)) z'(t) dt. \quad (3.38)$$

Ako je slučajno imaginarni dio funkcije h konstantan, $I(x,y) = I_0$ na krivulji po kojoj integriramo onda možemo dodatno pojednostaviti prethodni izraz

$$F(\lambda) = e^{i\lambda I_0} \int_{t_a}^{t_b} e^{\lambda R(x(t),y(t))} u(t) dt + ie^{i\lambda I_0} \int_{t_a}^{t_b} e^{\lambda R(x(t),y(t))} v(t) dt \quad (3.39)$$

gdje je $g(z(t))z'(t) = u(t) + iv(t)$.

Vidimo da je integracija po krivuljama konstantnog imaginarnog dijela jednostavnija nego po originalnim krivuljama pa je ideja odabrati upravo krivulje konstantnog imaginarnog dijela. Vidjeli smo u prethodnim razmatranjima da kod analitičkih funkcija krivulja integracije nije bitna jer integral ne ovisi o krivulji po kojoj integriramo nego samo o početnoj i završnoj točki. Zato ćemo nakon što pronađemo krivulje konstantnog imaginarnog dijela funkcije h promijeniti originalnu krivulju po kojoj integriramo s tom novom krivuljom.



Slika 3.5: Krivulja na kojoj je imaginarni dio funkcije h konstantan, a realni dio funkcije h se najbrže mijenja.

Krivulja Γ_0 za koju vrijedi da je $I(x,y) = I_0$ je nivo krivulja u kompleksnoj ravnini \mathbb{C} . Vrijedi da je $\nabla I(x,y)$ okomit na krivulju Γ_0 . Kada $\nabla I(x,y)$ ne bi bio okomit na krivulju Γ_0 to bi značilo da gradijent funkcije $I(x,y)$ ima komponentu u smjeru funkcije krivulje Γ_0 . To bi značilo da se funkcija $I(x,y)$ mijenja kako se krećemo po krivulji Γ_0 što nije moguće jer je $I(x,y) = I_0$, tj. funkcija je konstantna na krivulji Γ_0 .

Funkcija h je analitička funkcija što znači da njen realni dio $R(x,y)$ i njen imaginarni dio $I(x,y)$ moraju zadovoljavati Cauchy-Riemannove uvjete. Pogledamo li gradiente realnog i imaginarnog dijela dobijemo da je skalarni produkt između njih,

$$\nabla R \cdot \nabla I = \left(\frac{\partial R}{\partial x} e_1 + \frac{\partial R}{\partial y} e_2 \right) \cdot \left(\frac{\partial I}{\partial x} e_1 + \frac{\partial I}{\partial y} e_2 \right) = \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} \frac{\partial I}{\partial y} = \frac{\partial I}{\partial y} \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial y} = 0$$

Vrijedi da je $\nabla R \cdot \nabla I = 0$ na krivulji Γ_0 , tj. smjer u kojem funkcija R najbrže raste okomit je na $\nabla I(x,y)$. Kako je $\nabla I(x,y)$ u svakoj točki krivulje Γ_0 okomit na krivulju to znači da je $\nabla R(x,y)$ u svakoj točki krivulje Γ_0 tangencijalan na krivulju. Funkcija R najbrže se mijenja ako idemo u smjeru $\nabla R(x,y)$ po krivulji. Vrijedi da je krivulja konstantnog imaginarnog dijela funkcije h ujedno i krivulja na kojoj se realni dio funkcije h najbrže mijenja. Krenemo li po krivulji Γ_0 u smjeru

$\nabla R(x,y)$ ići ćemo u smjeru najbržeg rasta funkcije $R(x,y)$, a krenemo li u suprotnom smjeru od $\nabla R(x,y)$ ići ćemo u smjeru najbržeg pada funkcije $R(x,y)$.

Dva najčešća integrala koji se javljaju u primjerima asimptotskih aproksimacija integralnih funkcija su realna i kompleksna Gaussova funkcija. Za integral realne Gaussove funkcije od prije znate da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (3.40)$$

Kako bismo riješili integral kompleksne Gaussove funkcije moramo primijeniti metodu najbržeg spusta. Rješenje integrala kompleksne Gaussove funkcije koristit ćemo u Metodi stacionarne faze.

■ **Primjer 3.5 — Kompleksna Gaussova funkcija.** U primjenama, pogovotovo u asimptotskoj aproksimaciji integralnih funkcija Metodom stacionarne faze javlja se integral kompleksne Gaussove funkcije po realnoj osi

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iz^2} dz. \quad (3.41)$$

Na realnoj osi kompleksna Gaussova funkcija je oscilirajuća funkcija i nije moguće direktno riješiti ovaj integral. Ideja je promijeniti područje integracije i preći na krivulju najbržeg spusta za funkciju $h(z) = iz^2$. To je ujedno i krivulja na kojoj je imaginarni dio funkcije h konstantan. Prelaskom na krivulju najbržeg spusta moguće je riješiti integral kompleksne Gaussove funkcije. Prije svega trebamo isprobati je li funkcija h analitička.

Integral kompleksne Gaussove funkcije je upravo oblik integralne funkcije opisan u Metodi najbržeg spusta s funkcijama $h(z) = iz^2$ i $g(z) = 1$. Funkciju $h(z)$ možemo rastaviti na njen realni i imaginarni dio kao

$$h(z) = iz^2 = i(x+iy)^2 = i(x^2 + 2ixy - y^2) = -2xy + i(x^2 - y^2) = R(x,y) + iI(x,y). \quad (3.42)$$

Vrijedi da je

$$\frac{\partial R}{\partial x} = -2y = \frac{\partial I}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -2x = -\frac{\partial I}{\partial x}. \quad (3.43)$$

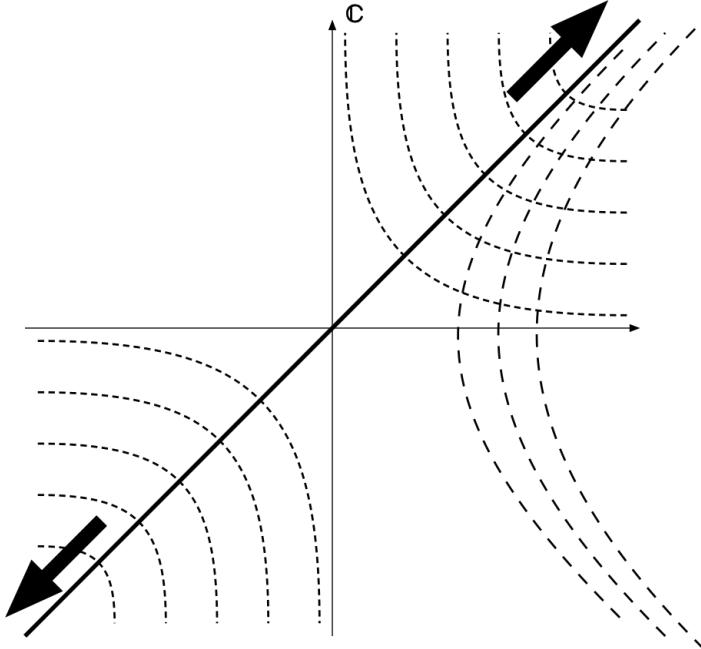
Parcijalne derivacije realnog i imaginarnog dijela funkcije h polinomi su prvog stupnja što znači da su te parcijalne derivacije neprekidne. Vidimo da zadovoljavaju i Cauchy-Riemannove uvjete što znači da je funkcija h analitička funkcija. Isto se lako pokaže i za funkciju $g(z) = 1$

Realni i imaginarni dio funkcije h možemo prikazati kao nivo krivulje u kompleksnoj ravnini za koje vrijedi

$$R(x,y) = -2xy = R_0 \quad \text{i} \quad I(x,y) = x^2 - y^2 = I_0, \quad (3.44)$$

za neke realne brojeve R_0 i I_0 . Te nivo krivulje su hiperbole u kompleksnoj ravnini. Možemo ih vidjeti na slici 3.6. Funkcija $R(x,y)$ pada u prvom i trećem kvadrantu jer su u tom kvadrantu x i y pozitivni pa kako se sve više i više udaljavamo od ishodišta u ta dva kvadranta funkcija $R(x,y)$ je sve manja i manja. U drugom i četvrtom kvadrantu funkcija $R(x,y)$ kako se udaljavamo od ishodišta.

Po prethodno pokazanim uvjetima znamo da je krivulja najbržeg pada funkcije h ujedno i krivulja na kojoj je imaginarni dio funkcije h konstantan. Iz tog razloga biramo funkciju $y = x$ jer je na njoj $I(x,y) = 0$, a realni dio $R(x,y)$ brzo pada kako se udaljavamo u smjeru strelica na slici 3.6.



Slika 3.6: Područja pada i rasta realnog i imaginarnog dijela funkcije e^{iz^2} .

Na slici 3.7 možemo vidjeti početnu krivulju integracije, realnu os, za kompleksnu Gaussovou funkciju e^{iz^2} , krivulju najbržeg spusta zajedno i s krivuljama Γ_1^R , Γ_2^R i Γ_3^R koje su međufaze između prelaska s realne osi na krivulju najbržeg spusta. Prethodno smo pokazali da je funkcija h analitička funkcija pa znamo da vrijedi

$$\int_{-R}^R e^{iz^2} dz = \int_{\Gamma_1^R + \Gamma_2^R + \Gamma_3^R} e^{iz^2} dz. \quad (3.45)$$

Pustimo li da $R \rightarrow \infty$ u prethodnoj jednakosti dobit ćemo da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iz^2} dz = \int_{\Gamma_0} e^{iz^2} dz \quad (3.46)$$

ako integrali na krivuljama Γ_1^R i Γ_3^R iščezavaju. Parametrizacijom krivulje Γ_3^R kao $z = R + iy$ možemo pokazati da je

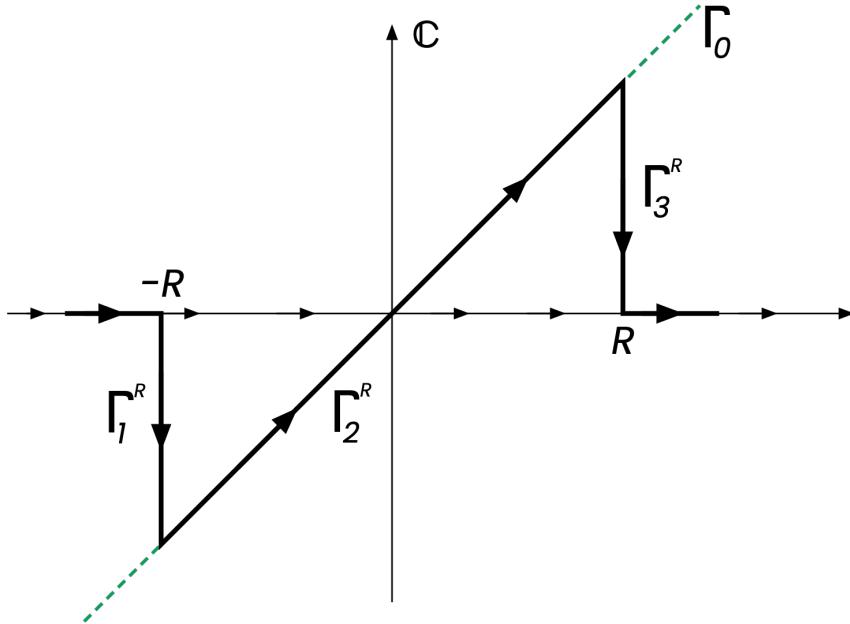
$$\int_{\Gamma_3^R} e^{iz^2} dz = \left| \begin{array}{l} z = R + iy \\ dz = i dy \end{array} \right| = \int_R^0 e^{i(R+iy)^2} i dy = -i \int_0^R e^{i(R^2+2iRy-y^2)} dy = -ie^{iR^2} \int_0^R e^{-2Ry} e^{-iy^2} dy. \quad (3.47)$$

Prethodni integral možemo ocijeniti kao

$$\left| \int_{\Gamma_3^R} e^{iz^2} dz \right| \leq \left| \int_0^R -ie^{iR^2} \int_0^R e^{-2Ry} e^{-iy^2} dy \right| \leq \int_0^R e^{-2Ry} dy = \frac{1 - e^{-2R^2}}{2R}. \quad (3.48)$$

Iz prethodne ocjene vidimo da

$$\left| \int_{\Gamma_3^R} e^{iz^2} dz \right| \rightarrow 0 \quad \text{za} \quad R \rightarrow \infty. \quad (3.49)$$



Slika 3.7: Promjena krivulje integracije za e^{iz^2} iz realne osi u krivulju najbržeg spusta Γ_0 .

što znači da za $R \rightarrow \infty$ vrijedi da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iz^2} dz = \int_{\Gamma_0} e^{iz^2} dz \quad (3.50)$$

što je puno lakši integral za riješiti. Vrijedi da je

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_0} e^{iz^2} dz &= \left| \frac{z = x + ix}{dz = (1+i)dx} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(1+i)^2 x^2} (1+i) dx = (1+i) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2} dx \left| \frac{\sqrt{2}x = t}{dx = \frac{dt}{\sqrt{2}}} \right| \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Na sličan način, provodeći analizu od početka jer se mijenjaju kvadranti u kojima realni dio funkcije h pada možemo izračunati i

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz^2} dz = \sqrt{\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}}. \quad (3.52)$$

■

Korištenjem prethodnog primjera možemo riješiti poznate Fresnelove integrale.

■ **Primjer 3.6 — Fresnelovi integrali.** Riješite Fresnelove integrale

$$\int_0^{\infty} \cos(t^2) dt \quad i \quad \int_0^{\infty} \sin(t^2) dt. \quad (3.53)$$

Korištenjem parnosti podintegralnih funkcija i Eulerove formule dobijemo

$$\int_0^{\infty} \cos(t^2) dt + i \int_0^{\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(t^2) dt + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it^2} dt = \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Iz prethodne jednakosti vidimo da su Fresnelovi integrali jednaki

$$\int_0^{\infty} \cos(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{i} \quad \int_0^{\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (3.54)$$

■

3.3 Metoda stacionarne faze

Metoda stacionarne faze asimptotska je metoda za aproksimaciju integralnih funkcija oblika

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\phi(t)} f(t) dt \quad (3.55)$$

u slučaju kada parametar $\omega \rightarrow \infty$. Integrale tog oblika sreli smo u sva tri primjera na početku ovog poglavlja. Jedan od jednostavnijih primjera tog tipa bila bi integralna funkcija

$$F(\omega) = \int_a^b \cos(\omega t) dt = \frac{\sin(\omega b) - \sin(\omega a)}{\omega}. \quad (3.56)$$

Kako parametar ω raste tako raste i frekvencija oscilacija i sve periode unutar područja integracije se poništavaju i ostaje samo doprinos na rubu koji je za sve veće i veće kružne frekvencije ω sve manji i manji kao što možemo vidjeti na slici



Slika 3.8: Ponašanje podintegralne funkcije $\cos(\omega t)$ na segmentu $[a, b]$.

■ Primjer 3.7 — Modulirani val.

Teorem 3.3.1 — Riemann-Lebesgue. Neka je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrabilna. Tada

$$\int_a^b e^{-i\omega t} f(t) dt \rightarrow 0 \quad \text{za} \quad |\omega| \rightarrow \infty. \quad (3.57)$$

Ako je f' derivacija funkcije f konačna na segmentu $[a, b]$ onda možemo dati asimptotsku ocjenu

prethodne jednakosti

$$\int_a^b e^{-i\omega t} f(t) dt = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega}\right) \quad \text{za } |\omega| \rightarrow \infty. \quad (3.58)$$

Spektar realne funkcije trne prema beskonačnosti.

- **Primjer 3.8 — Dugoročno ponašanje rješenja Schrodingerove jednadžbe s linearnim potencijalom.** ■



4. Elektromagnetski valovi

Osnovno sredstvo kojim detektiramo objekte u prostoru radarom je elektromagnetski val i za modeliranje problema detekcije potrebno je osnovno poznavanje širenja elektromagnetskih valova. Riječ je o jednoj od najrazvijenijih fizikalnih teorija s vrlo širokom primjenom u inženjerstvu. Detaljniji opis može se pronaći u širokom spektru knjiga od kojih posebno izdvajamo Classical Electrodynamics [12] u kojoj se mogu pronaći zanimljiva fizikalna objašnjenja pojedinih elektromagnetskih pojava, zatim Electromagnetic Theory [11] u kojoj se klasična elektrodinamika razvija u prostor-vremenu i povezuje s teorijom elastičnosti i termodinamikom i na kraju Engineering Electromagnetics [9], vjerojatno najbolja inženjerska knjiga o elektromagnetizmu i primjenama u elektrotehnici. Detaljan opis interakcije elektromagnetskoga vala i materije možete pronaći u knjizi Principles of Scattering and Transport of Light [8]. Matematička pozadina modeliranja problema raspršenja i problema rezonatora klasičnim metodama i integralnim jednadžbama detaljno je opisana u knjizi he Mathematical Theory of Time-Harmonic Maxwell's Equations [10]. U ovom poglavlju dotaknut ćemo se osnovnih pojmoveva i modela. Za sva ostala pitanja ohrabrujemo vas da uzmete jedno od navedenih knjiga u ruke.

4.1 Maxwellove jednadžbe

S jedne strane imamo materiju, a s druge strane elektromagnetski val i te dvije pojave međusobno interagiraju. Jednadžbe koje opisuju na koji način te dvije pojave interagiraju zovu se Maxwellove jednadžbe. Detaljnije, Maxwellove jednadžbe povezuju električno polje \mathbf{E} s magnetskim poljem \mathbf{B} i ta dva polja povezuju s gustoćim naboja ρ i gustoćom struje \mathbf{J} . Jednadžbe opisuju vremensku evoluciju elektromagnetskoga polja. Nadopunimo li ih s potrebnim početnim uvjetima koji vladaju u prostoru i rubnim uvjetima koji objašnjavaju ponašanje elektromagnetskoga polja na rubu prostora promatranja dobit ćemo matematički model čije rješenje u potpunosti opisuje vremensku promjenu elektromagnetskoga polja u tom dijelu prostora.

Teorem 4.1.1 — Helmholtz. Za potpuni opis vektorskog polja \mathbf{F} potrebno je poznavati rotaciju $\nabla \times \mathbf{F}$ i divergenciju $\nabla \cdot \mathbf{F}$.

U modelu koji redovito koristimo u pri opisu klasične elektrodinamike električno i magnetsko polje predstavljamo kao vektorske veličine. Po Helmholtzovom teoremu to znači da moramo opisati rotaciju i divergenciju električnog i magnetskog polja. Upravo taj opis daju nam Maxwellove jednadžbe. U modelu se javlaju i tri konstante, permitivnost vakuma $\epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$, permeabilnost vakuma $\mu_0 \approx 1.26 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$ i brzina svjetlosti c za koju vrijedi da je $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$. Maxwellove jednadžbe su

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{Gaussov zakon za električno polje,} \quad (4.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad \text{Faradayev zakon,} \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \text{Gaussov zakon za magnetsko polje,} \quad (4.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad \text{Ampereov zakon.} \quad (4.4)$$

U problemima koje ćemo promatrati nećemo imati slobodne naboje i struje već ćemo se baviti elektromagnetskim valovima u slobodnom prostoru. Kako bismo dobili Maxwellove jednadžbe u slobodnoj prostoru dovoljno je u prethodni sustav jednadžbi uvrstiti da je gustoća naboja $\rho = 0$ i gustoća struje $\mathbf{J} = 0$. Dobijemo sustav jednadžbi

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \text{Gaussov zakon za električno polje} \quad (4.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad \text{Faradayev zakon} \quad (4.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \text{Gaussov zakon za magnetsko polje} \quad (4.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \quad \text{Ampereov zakon} \quad (4.8)$$

U slučaju kada nemamo slobodnih naboja ili gustoća struje jedina konstanta koja nam se javlja u jednadžbama je brzina svjetlosti c . Ona iznosi

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s.} \quad (4.9)$$

Jedno od mogućih rješenja koje Maxwellove jednadžbe podržavaju je val ili valno širenje elektromagnetskoga polja. Valnu prirodu Maxwellovih jednadžbi možemo otkriti tako što operatorom rotacije djelujemo na Faradayev zakon. Vrijedi

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}). \quad (4.10)$$

Uvrstimo li na desnu stranu prethodne jednakosti drugi dio Ampereovog zakona dobijemo

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (4.11)$$

Iz jednakosti za dvostruku rotaciju dobijemo da je lijeva strana prethodne jednakosti jednaka

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E} \quad (4.12)$$

jer je po Gaussovom zakonu za električno polje $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Izvedeno nam pokazuje da se električno polje \mathbf{E} giba kroz prostor u formi vala jer zadovoljava valnu jednadžbu

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.13)$$

Model mora biti nadopunjena i početnim uvjetima koji opisuju početni valni paket,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t = 0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}), \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(\mathbf{x}, t = 0) = \nabla \times \mathbf{B}_0(\mathbf{x}), \quad (4.15)$$

gdje je drugi početni uvjet izведен za početni uvjet za magnetsko polje \mathbf{B} . Kako bi dobiveno rješenje valne jednadžbe izvedeno iz Maxwellovih jednadžbi zadovoljavaće Maxwellove jednadžbe u svakom vremenskom trenutku mora vrijediti da je $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Ne možemo znati je li to slučaj s našim rješenjem bez da provjerimo rješenje koje dobijemo. Srećom, rješenja Maxwellove jednadžbe čuvaju tu simetriju, tj. ako vrijedi da je $\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = 0$ tada je i u svakom vremenskom trenutku $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ za dobiveno rješenje. Ukupna vremenska promjena Gaussovog zakona za električno polje od trenutka $t = 0$ do trenutka $t = T$ jednaka je

$$\int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0, \quad (4.16)$$

što nam daje izraz

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, T) = \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, 0) = \nabla \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{x}). \quad (4.17)$$

Vidimo da u svakom vremenskom trenutku T vrijedi da je $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, T) = \nabla \cdot \mathbf{E}_0(\mathbf{x})$ što znači da je divergencija električnog polja u našem problemu očuvana kroz vrijeme. Ako uzmemos početni uvjet koji zadovoljava Gaussov zakon za električno polje onda će i rješenje koje dobijemo zadovoljavati Gaussov zakon za električno polje. Isto vrijedi i za Gaussov zakon za magnetsko polje. Odaberemo li početne uvjete za električno i magnetsko polje koji zadovoljavaju Gaussove zakone onda će i rješenje koje dobijemo zadovoljavati Gaussove zakone.

U inženjerskim primjenama obično koristimo harmonijsku pobudu, harmonijski val koji zovemo i monokromatski val. To je val u kojemu se sve vremenske promjene odvijaju jednom kružnom frekvencijom ω . Jednadžbe koje zadovoljava monokromatski val iste su one jednadžbe koje bismo dobili da na Maxwellove jednadžbe primijenimo Fourierovu transformaciju. Kako ne bismo uvodili dodatne označke za opis električnog i magnetskog polja uslijed harmonijske pobude mi ćemo i ta polja označavati istim slovima. U svakom pojedinom slučaju bit ćemo ili u harmonijskoj pobudi ili u vremenskoj domeni, ali se te dvije situacije nikada neće miješati u istom problemu. Iz tog razloga ne može doći do zabune, a smanjiti ćemo količinu označaka. Maxwellove jednadžbe za harmonijsku pobudu su

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \text{Gaussov zakon za električno polje}, \quad (4.18)$$

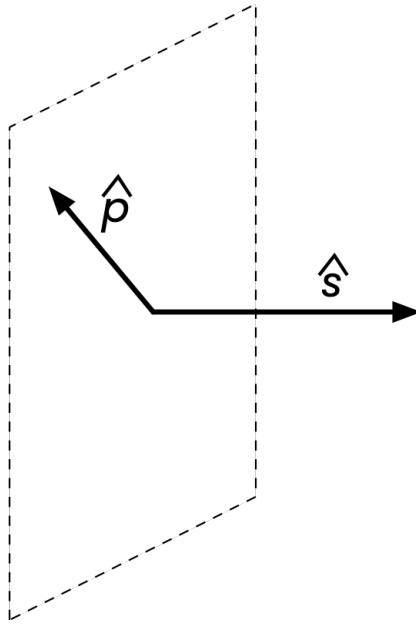
$$\nabla \times \mathbf{E} + i\omega \mathbf{B} = 0, \quad \text{Faradayev zakon}, \quad (4.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \text{Gaussov zakon za magnetsko polje}, \quad (4.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} + \frac{i\omega}{c^2} \mathbf{E} = 0, \quad \text{Ampereov zakon}. \quad (4.21)$$

U slučaju harmonijske pobude vremenska promjena u valnoj jednadžbi prelazi u $(i\omega)^2 = -\omega^2$ što konstantu u jednadžbi mijenja u $\frac{\omega^2}{c^2}$. Valnu jednadžbu za harmonijsku pobudu zovemo još i Helmholtzova jednadžba

$$\Delta \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0. \quad (4.22)$$



Slika 4.1: Planarni val.

■ Primjer 4.1 — Planarni monokromatski val. Planarni monokromatski val je val kod kojega se sve točke iste faze (valna fronta) nalaze na ravnini okomitoj na smjer širenja vala. Opisan je valnim brojem $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$, jediničnim vektorom koji opisuje smjer širenja \hat{s} , vektorom polarizacije \hat{p} i amplitudom titranja E_0 . Kako bi valna fronta bila okomita na smjer širenja vala vrijedi da je $\hat{s} \cdot \hat{p} = 0$.

Model planarnog monokromatskog vala dan je

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{x}, t) = \hat{p} E_0 e^{ik\hat{s} \cdot \mathbf{x}} e^{-i\omega t} = \hat{p} E_0 e^{i(k\hat{s} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}. \quad (4.23)$$

U argumentu planarnog vala je $k\hat{s} \cdot \mathbf{x} - \omega t$, možemo vidjeti da kako vrijeme t raste tako i produkt $k\hat{s} \cdot \mathbf{x}$ mora rasti ako želimo ostati na istofaznoj točki. To znači da se ovako napisan planarni val giba u smjeru jediničnog vektora \hat{s} .

Pitanje je zadovoljava li planarni monokromatski val Maxwellove jednadžbe, a time i valnu jednadžbu. Dovoljno nam je provjeriti zadovoljava li Gaussov zakon za električno polje i Helmholtzovu jednadžbu. Moramo provjerit oba uvjeta zasebno. Vrijedi da je

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_p = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (p_j E_0 e^{i(k\hat{s} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}) = \sum_{j=1}^3 p_j E_0 e^{i(k\hat{s} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} iks_j = E_0 e^{i(k\hat{s} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \sum_{j=1}^3 p_j s_j = 0$$

jer je polarizacija kod planarnog vala okomita na smjer širenja pa je $\hat{p} \cdot \hat{s} = \sum_{j=1}^3 p_j s_j = 0$. Kako bismo ispitali zadovoljava li planarni val Helmholtzovu jednadžbu treba nam druga derivacija planarnog vala po svim varijablama

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\hat{p} E_0 e^{i(k\hat{s} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}) = (\hat{p} E_0 e^{i(k\hat{s} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}) (iks_j)^2 = -k^2 s_j^2 (\hat{p} E_0 e^{i(k\hat{s} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}) \quad (4.24)$$

pa je

$$\Delta \mathbf{E}_p = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 \mathbf{E}_p}{\partial x_j^2} = - (\hat{p} E_0 e^{i(k\hat{s} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}) k^2 \sum_{j=1}^3 s_j^2 = -k^2 \mathbf{E}_p \quad (4.25)$$

jer je \hat{s} jedinični vektor. Uvrstimo li \mathbf{E}_p u Helmholtzovu jednadžbu vidimo da je

$$\Delta \mathbf{E}_p + k^2 \mathbf{E}_p = -k^2 \mathbf{E}_p + k^2 \mathbf{E}_p = 0. \quad (4.26)$$

Planarni monokromatski val zadovoljava Gaussov zakon za električno polje i Helmholtzovu jednadžbu što je valna jednadžba za harmonijsku pobudu. Mogli smo planarni val uvrstiti i direktno u valnu jednadžbu u slobodnom prostoru i došli bismo do istog zaključka, ali prešli smo na Helmholtzovu jednadžbu da si smanjimo količinu deriviranja jer je vremenska derivacija u slučaju harmonijske pobude unaprijed poznata zbog posebne vremenske promjene koja se u njoj javlja. ■

Kada elektromagnetski val prelazi iz sredstva s jednim elektromagnetskim svojstvima u sredstvo s drugim elektromagnetskim svojstvima dolazi do promjene u dolaznom valu. Određeni dio dolaznog vala reflektirat će se natrag dok će drugi dio vala proći u drugo sredstvo. Ova pojava opisana je rubnim uvjetima. Nama će u našim razmatranjima biti potreban opis rubnog uvjeta na savršenom metalu. Metal je ekvipotencijalna ploha što znači da unutar metala nema promjene potencijala, a time niti električnog polja. Električno polje unutar metala jednako je nula. To diktira rubni uvjet na površini metala. Vrijedi da je

$$\hat{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{na rubu metalnog objekta.} \quad (4.27)$$

Vektor \hat{n} je normala na površinu objekta pa je $\hat{n} \times \mathbf{E}$ komponenta električnog polja okomita na normalu što znači da je tangencijalna na površinu. Dakle, tangencijalna komponenta električnog polja na rubu metalne površine jednaka je 0.

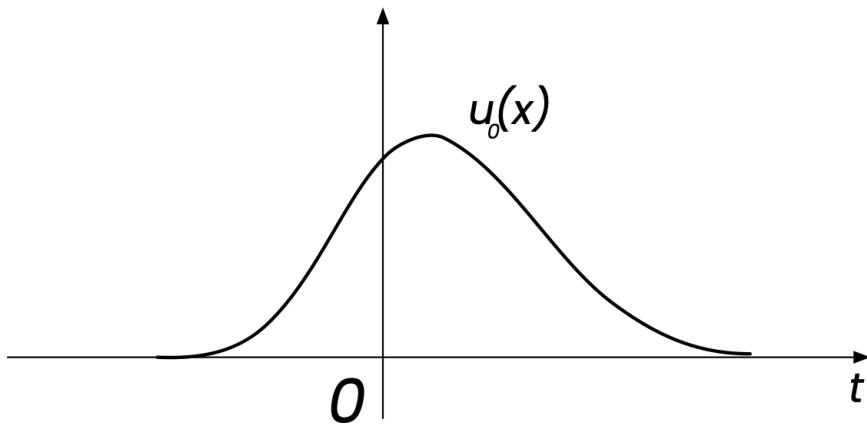
■ **Primjer 4.2 — Dalambertovo rješenje valne jednadžbe.** Promatramo širenje impulsa $u_0(x)$ u jednoj dimenziji. Taj model dan je valnom jednadžbom u jednoj dimenziji i početnim uvjetom

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (4.28)$$

$$u(x, t=0) = u_0(x), \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t=0) = 0. \quad (4.30)$$

Opisanu situaciju, s početnim uvjetim $u(x, t=0) = u_0(x)$ možemo vidjeti na slici 4.2.



Slika 4.2: Početni valni paket.

Dalambert je proučavao koje su to karakteristike po kojima se giba moguće rješenje i zaključio da trebamo napraviti zamjenu varijabli

$$\xi = x - ct \quad \text{i} \quad \eta = x + ct. \quad (4.31)$$

U novim koordinatama naše rješenje zvat ćemo

$$v(\xi, \eta) = u(x, t). \quad (4.32)$$

Kako bismo transformirali cijelu jednadžbu trebamo izračunati parcijalne derivacije po svim varijablama primjenom lančanog pravila. Za prvu prostornu derivaciju vrijedi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} 1 + \frac{\partial v}{\partial \eta} 1 = \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta}. \quad (4.33)$$

Druga derivacija po varijabli x derivacija je prve derivacije po varijabli x

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}. \quad (4.34)$$

Na isti način izvedemo derivaciju po varijabli t kao

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \xi} (-c) + \frac{\partial v}{\partial \eta} (c) = -c \frac{\partial v}{\partial \xi} + c \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad (4.35)$$

i drugu derivaciju po varijabli t kao

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) = \left(-c \frac{\partial}{\partial \xi} + c \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(-c \frac{\partial v}{\partial \xi} + c \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}. \quad (4.36)$$

Promjenom varijabli početna valna jednadžba jednaka je

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}, \quad (4.37)$$

tj. početnu valnu jednadžbu transformirali smo u jednadžbu

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (4.38)$$

koju možemo jednostavno dva puta integrirati. Provedemo li prvu integraciju po varijabli ξ dobijemo jednadžbu prvog reda

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = H(\eta) \quad (4.39)$$

gdje je $H(\eta)$ nepoznata funkcija u varijabli η koju smo mogli izgubiti deriviranjem prethodne jednadžbe po varijabli ξ . Integriramo li sada po varijabli η s desne strane imat ćemo i dalje neku funkciju u varijabli η , ali sada $G(\eta)$ jer se promijenila integriranje. Na isti način kao i u prethodnom koraku dobit ćemo i nepoznatu funkciju u varijabli ξ koju smo mogli izgubiti derivirajući prethodnu jednadžbu po η . Ukupno rješenje dano je izrazom

$$v(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta) \quad (4.40)$$

u nepoznatim funkcijama od ξ i η koje trebamo odrediti iz početnih uvjeta. Vratimo li se na početne varijable vrijedi da je

$$u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct). \quad (4.41)$$

Uvrstimo li početne uvjete vrijedi da je

$$u_0(x) = F(x) + G(x), \quad (4.42)$$

deriviranjem rješenja i uvrštavanjem $t = 0$ dobijemo

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -cF'(x) + cG'(x). \quad (4.43)$$

Riješimo li prethodne dvije jednadžbe dobit ćemo jednostavnu diferencijalnu jednadžbu

$$F'(x) = G'(x) = \frac{u'_0(x)}{2} \quad (4.44)$$

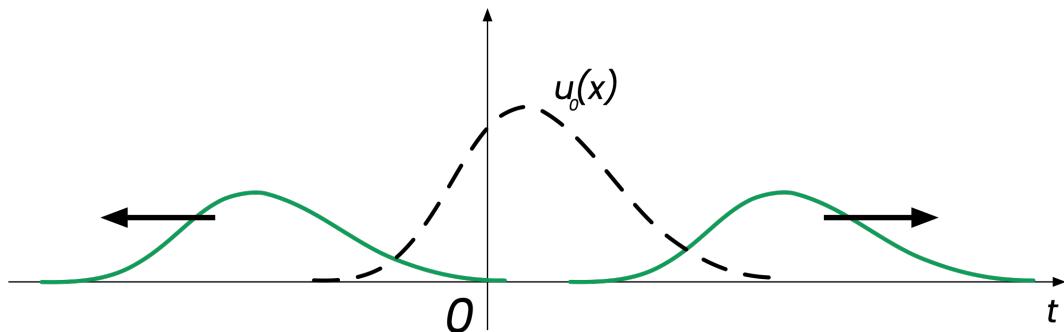
čija su rješenja funkcije

$$F(x) = \frac{u_0(x)}{2} + c_1 \quad \text{i} \quad G(x) = \frac{u_0(x)}{2} + c_2 \quad (4.45)$$

za neke konstante $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Rješenje valne jednadžbe jednako je

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x - ct) + u_0(x + ct)) \quad (4.46)$$

jer je $c_1 + c_2 = 0$ zbog početnog uvjeta.



Slika 4.3: Širenje valnog paketa.

U rješenju možemo vidjeti zanimljiv efekt. Početni uvjet raspadne se na dva jednakata dijela i jedan dio kreće na lijevu stranu dok drugi dio kreće na desnu stranu. Oba se gibaju brzinom c i nastavljaju se tako gibati bez gušenja. Takvo ponašanje rješenja možete vidjeti kada bacite kamen u vodu. Iz mesta dodira, to udubljenje nastalo zbog upada kamena u vodu, generira mali val koji kreće kružno prema van od te točke. Zbog kružnog širenja dolazi do pada amplitude jer se odlazni val širi po sve većoj i većoj kružnici. To da valni paket nastavlja putovati bez pada amplitude specijalni je slučaj jedne dimenzije jer se energija nema kamo širiti. U jednoj dimenziji gibaju se točke i ne dolazi do širenja energije po sve većoj i većoj kružnici ili sferi. ■

4.2 Greenova funkcija

U slobodnom prostoru valna jednadžba je linearna i možemo ju promatrati kao linearan vremenski invarijantan sustav (LTI sustav).

- **Primjer 4.3 — LTI sustav.**
- **Primjer 4.4 — Sustav koji nije vremenski invarijantan.**
- **Primjer 4.5 — Greenova funkcija slobodnog prostora u vremenskoj domeni.**
- **Primjer 4.6 — Greenova funkcija slobodnog prostora u frekvencijskoj domeni.**

4.3 Raspršenje

Incidentni val interreagira s objektima i dolazi do raspršenja vala od tih objekata. To raspršenje rezultira perturbacijom incidentnog polja i tu perturbaciju mi detektiramo. U modeliranju opisane situacije raspršivač promatramo kao sustav na čiji ulaz dolazi incidentno polje, a raspršeno polje je izlaz iz sustava. U promatranju raspršenja bavit ćemo se skalarnim valovima jer su nam oni dovoljni za razumijevanje situacije. Također, skalarnim modelom možemo opisati ponašanje pojedinih komponenata vektorskog problema.

smatramo izvorom novog vala

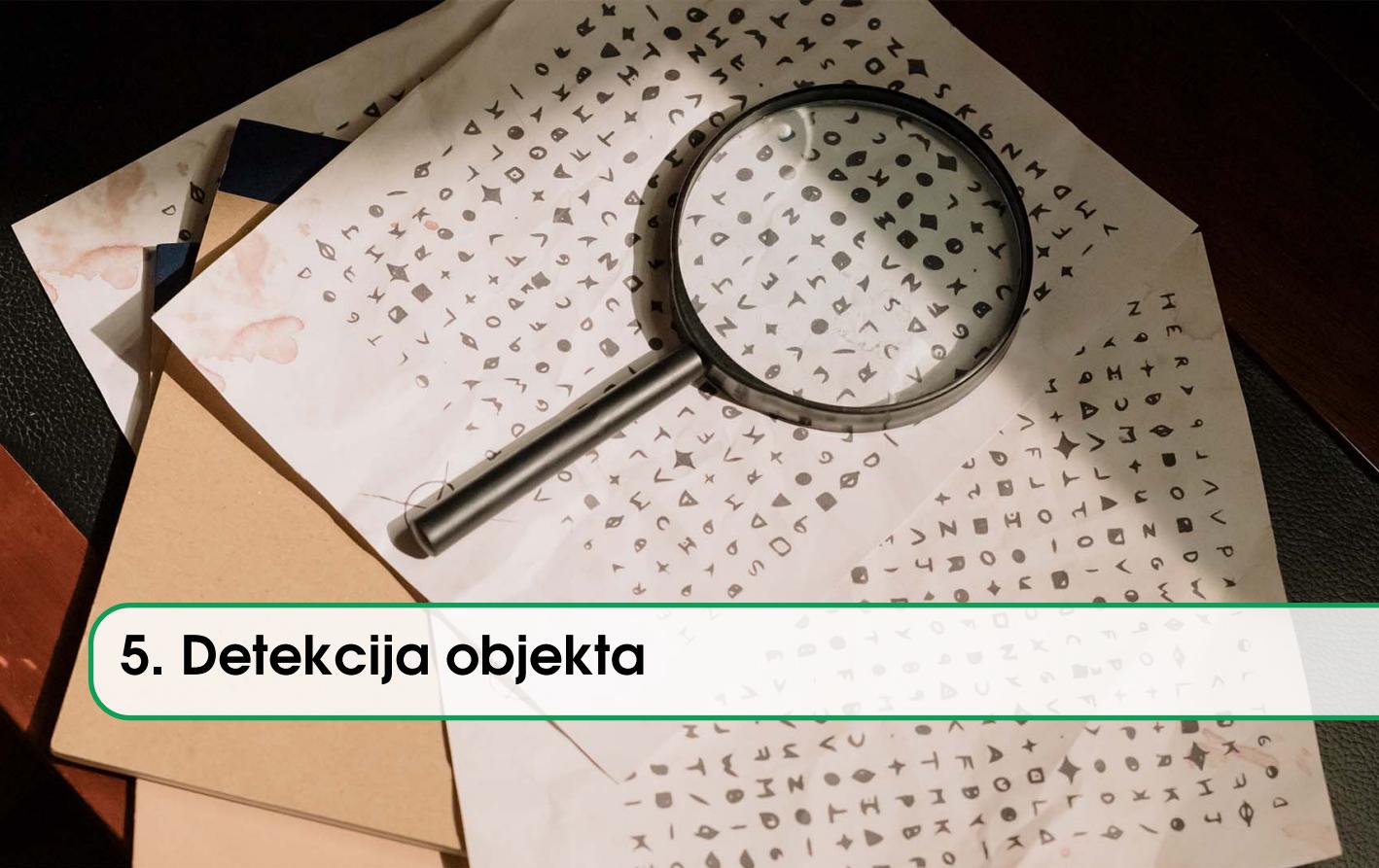
Detekcija položaja i brzine objekta

5 Detekcija objekta 65

- 5.1 Model primljenog signala u slučaju statičnog objekta
- 5.2 Mjerenje udaljenosti nepoznatog objekta
- 5.3 Model primljenog signala u slučaju objekta koji se kreće
- 5.4 Mjerenje brzine nepoznatog objekta

6 Korelacijski prijamnik 75

- 6.1 Prilagođeni filter
- 6.2 Signali koje koristimo u primjeni



5. Detekcija objekta

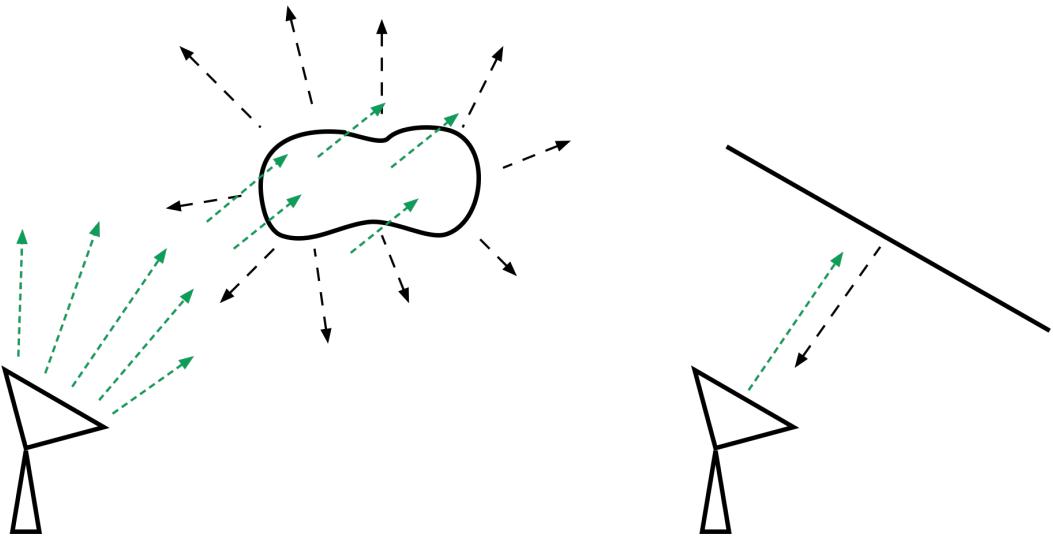
U uvodnom poglavlju vidjeli smo neke od osnovnih principa rada radara. Iz odašiljačke antene odašiljemo elektromagnetski val određene frekvencije u slobodni prostor i osluškujemo jeku, povratni val koji se reflektirao od nekog objekta u prostoru. Znamo da je taj val prošao put jednak dvostrukoj udaljenosti od objekta od radara jer je jednu duljinu tog puta prešao putujući od radara prema objektu, a drugu udaljenost prešao je vraćajući se od objekta natrag prema radaru. Iz vremena kašnjenja tog signala možemo odrediti udaljenost objekta. No to kašnjenje signala ne možemo odrediti mjereći vrijeme štopericom nego moramo koristiti elektroničke sklopove kako bismo mogli automatizirati proces. Pitanje je kako onda odrediti položaj objekta. Ta informacija svakako je spremljena u signalu koji nam se vraća natrag. Pitanje je u kojem dijelu signala je spremljena i kako je možemo izvaditi van iz signala. Da bismo to mogli odrediti moramo interpretirati primljeni signal. Tu interpretaciju moguće je dobiti jedino kroz matematički model koji opisuje primljeni signal u slučaju detekcije statičnog objekta. Kako bismo došli do matematičkog modela koji opisuje dani situaciju moramo definirati geometriju problema te parametre i uvjete u kojima radimo. Na temelju tih podataka izvest ćemo model primljenog analitičkog signala i kroz taj model interpretirat ćemo primljeni signal u istoj ili sličnoj situaciji. Isto ćemo napraviti i za primjer u kojemu se nepoznati metalni objekt kreće nepoznatom brzinom u nepoznatom smjeru.

Cilj dobivenih modela je interpretacija snimljenih podataka u praktičnim primjenama. Pri korištenju radara sve što imamo su snimljeni signali i u tim signalima spremljena je informacija o položaju, brzini ili smjeru gibanja nepoznatog objekta. Pitanje je samo na koji način i u kojem dijelu signala je spremljena koja informacija. To možemo znati jedino kroz interpretaciju primljenog signala što je moguće ostvariti jedino kroz matematički model detekcije nepoznatog objekta. Više o modelima primljenog signala možete pronaći u knjizi Fundamentals of Radar Imaging [17].

5.1 Model primljenog signala u slučaju statičnog objekta

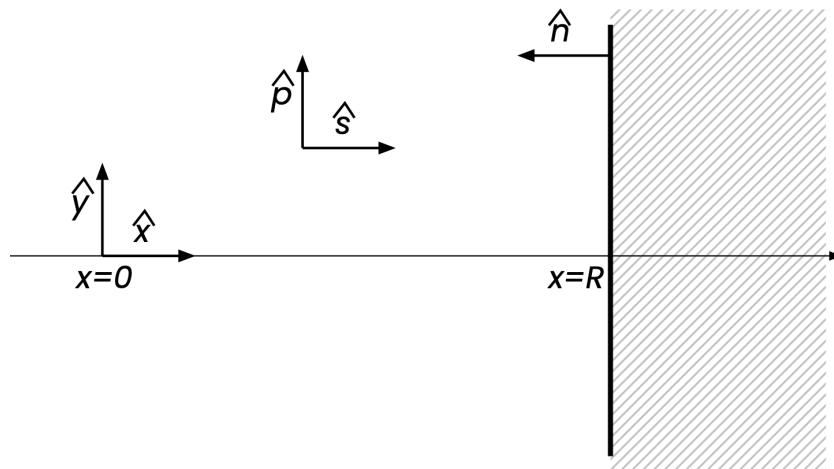
U ovom poglavlju analizirat ćemo postupak detekcije statičnog metalnog objekta na nepoznatoj udaljenosti kako bismo razvili matematički model primljenog analitičkog signala. Elektromagnetski problem koji opisuje proces detekcije metalnog objekta na nepoznatoj udaljenosti vrlo je složen. Antena našeg radara ima neku usmjerenuost, objekt je nepravilan, dolazi do djelomičnog raspršenja

poslanog vala, metal nije savršen, dolazi do prodora elektromagnetskoga vala u objekt i slično. Na slici 5.1 možemo vidjeti opisanu situaciju zajedno s jednodimenzionalnom aproksimacijom.



Slika 5.1: Zašto možemo koristiti jednodimenzionalni model?

Glavnina energije u sredini je glavne latice antene koju koristimo u primjenama i upravo ta energija se dominantno reflektira natrag ako je objekt negdje u sredini glavne latice antene radarskog sustava. Radi jednostavnosti opisanu situaciju možemo promatrati kroz jednodimenzionalan model, ali vidjet ćemo da se taj model u praksi jednostavno može primijeniti na realne situacije u kojima pokušavam odrediti udaljenost metalnog objekta. U pojednostavljenju koje koristimo objekt je neograničen, ali to ne čini apsolutno nikakvu razliku u određivanju udaljenosti jer je udaljenost definirana kao najkraća udaljenost do objekta, tj. udaljenost do dijela objekta koji nam je najbliži. Na slici 5.2 možemo vidjeti geometriju opisanog problema. Ishodište koordinatnog sustava postavili smo na mjesto našeg radara. Nepoznati metalni objekt nalazi se na nepoznatoj udaljenosti $x = R$ i tu nepoznatu udaljenost pokušavamo otkriti kroštenjem radara. Objekt je napravljen od savršenog metala (eng. Perfect Electric Conductor ili PEC) što znači da će na nepoznatom objektu doći do potpune refleksije poslanog signala od objekta.



Slika 5.2: Geometrija problema u slučaju detekcije statičnog objekta.

Elektromagnetski val kojeg odašiljemo radarem zovemo incidentni val i označavamo ga s \mathbf{E}_{in} .

Radi jednostavnosti pretpostaviti ćemo da odašiljemo planarni val što je i u skladu s opisanim pojednostavljenjem na slici 5.1. U postavljenoj geometriji incidentni val giba se u smjeru $\hat{s} = \hat{x}$ gdje je \hat{x} jedinični vektor u smjeru x osi. Odašiljačka antena našeg radara polarizirana je u smjeru $\hat{p} = \hat{y}$ gdje je \hat{y} jedinični vektor u smjeru y osi. U planarnom valu polarizacija vala mora biti okomita na smjer širenja, tj. mora vrijediti da je $\hat{p} \cdot \hat{s} = 0$. Smjer y osi postavili smo upravo u smjeru polarizacije naše antene. Normala objekta dana je jediničnim vektorom $\hat{n} = -\hat{x}$. Na površini nepoznatog metalnog objekta, za kojeg smo pretostavili da je napravljen od savršenog metala, vrijedi da je tangencijalna komponenta električnog polja jednaka nuli.

U radaru generiramo kratkotrajni impuls $s(t)$ kojeg moduliramo na visokofrekvenčni nosioc $\cos(\omega_0 t)$ kako bismo dobili signal $f(t) = s(t) \cos(\omega_0 t)$ spremjan za odašiljanje. Koristimo impuls kojemu je spektar uži od frekvencije nosioca. U prostor odašiljemo incidentni elektromagnetski val

$$\mathbf{E}_{in}(x, t) = \mathbf{E}_0 f\left(t - \frac{x}{c}\right) = \hat{y} E_0 f\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (5.1)$$

Elektromagnetski val koji dođe do metalnog objekta na njemu će se u potpunosti reflektirati i krenuti prema natrag, u smjeru $\hat{s} = -\hat{x}$. Taj reflektirani val zovemo raspršeni val \mathbf{E}_{sc} (eng. scattered). Ukupno električno polje jednako je sumi električnog polja incidentnog i električnog polja raspršenog elektromagnetskoga vala u svakoj točki prostora x i u svakom vremenskom trenutku t

$$\mathbf{E}_{uk}(x, t) = \mathbf{E}_{in}(x, t) + \mathbf{E}_{sc}(x, t). \quad (5.2)$$

Ukupno polje mora zadovoljiti rubni uvjet na površini nepoznatog objekta. Vrijedi da je

$$\hat{n} \times \mathbf{E}_{uk}(x = R, t) = 0. \quad (5.3)$$

Iz rubnog uvjeta odrediti ćemo oblik i ponašanje raspršenog vala koji se vraća natrag prema prijamniku. Zato što raspršeni val putuje u smjeru $\hat{s} = -\hat{x}$ znamo da je oblika

$$\mathbf{E}_{sc} = \mathbf{E}_s g\left(t + \frac{x}{c}\right). \quad (5.4)$$

gdje su njegova amplituda \mathbf{E}_s i funkcija g , koja opisuje ponašanje vala, nepoznate funkcije koje moramo odrediti iz rubnih uvjeta na površini objekta i oblika incidentnog vala. Rubni uvjet na površini objekta daje nam jednadžbu

$$\hat{n} \times \mathbf{E}_{sc}(R, t) = -\hat{n} \times \mathbf{E}_{in}(R, t) \quad (5.5)$$

iz koje možemo odrediti nepoznate funkcije. Uvrstimo li oblik incidentnog i raspršenog vala u prethodnu jednadžbu dobijemo jednadžbu

$$\hat{n} \times \mathbf{E}_s g\left(t + \frac{R}{c}\right) = -\hat{n} \times \mathbf{E}_0 f\left(t - \frac{R}{c}\right). \quad (5.6)$$

Jednakost amplituda postižemo tako postavljanjem $\mathbf{E}_s = -\mathbf{E}_0$. To je i u skladu s poznatim ponašanjem elektromagnetskoga vala u dodiru sa savršenim metalom. Elektromagnetski val odbija se od savršenog metala s pomakom u fazi od 180 stupnjeva. Zbog tog pomaka u fazi dolazi do promjene predznaka. Kako bismo odredili funkciju g iz funkcijске jednakosti

$$g\left(t + \frac{R}{c}\right) = f\left(t - \frac{R}{c}\right) \quad (5.7)$$

uvodimo zamjenu varijabli kojom varijablu u funkciji g proglašavamo novom varijablom u , tj.

$$u = t + \frac{R}{c}. \quad (5.8)$$

Iz prethodne zamjene možemo izraziti varijablu $t = t(u)$

$$t = u - \frac{R}{c} \quad (5.9)$$

kako bismo je uvrstili u jednakost koja povezuje funkcije f i g

$$g(u) = g\left(t + \frac{R}{c}\right) = f\left(t - \frac{R}{c}\right) = f\left(u - \frac{2R}{c}\right). \quad (5.10)$$

Vrijedi da je raspršeno polje \mathbf{E}_{sc} jednako

$$\mathbf{E}_{sc}(x, t) = -\mathbf{E}_0 g\left(t + \frac{x}{c}\right) = -\mathbf{E}_0 f\left(t + \frac{x}{c} - \frac{2R}{c}\right). \quad (5.11)$$

Znamo iz uvodnog poglavlja da kod detekcije statičnog objekta val prolazi dvostruki put i to je upravo ono što smo i dobili u modelu reflektiranog vala. U njega je upisan faktor $\frac{2R}{c}$ koji opisuje ukupno kašnjenje zbog dvostrukog puta koji val prelazi.

Do radara nam se vraća električno polje jednako

$$\mathbf{E}_{sc}(x = 0, t) = -\mathbf{E}_0 g\left(t + \frac{x}{c}\right) = -\mathbf{E}_0 f\left(t - \frac{2R}{c}\right) \quad (5.12)$$

koje nam nakon što prođe kroz antenski sustav daje signal

$$p(t) = f\left(t - \frac{2R}{c}\right) = s\left(t - \frac{2R}{c}\right) \cos\left(\omega_0\left(t - \frac{2R}{c}\right)\right). \quad (5.13)$$

Za sada zanemarujujemo promjenu amplitude signala jer u njoj nije spremljena nikakva korisna informacija o snimljenom objektu. Dok je razina primljenog signala dovoljna za obradu, amplituda signala nam ne igra neku važnu ulogu. Također, izdvajanje signala iz šuma i predobrada nije dio matematičkog modela radara i on s modelom primljenog signala nema nikakve veze. U praktičnim primjenama uvijek imamo šum, ali s njim ćemo se nositi kao i u svim ostalim komunikacijskim primjenama. Vidjet ćemo u sljedećem poglavlju jedan od najpoznatijih i najkorištenijih načina za izdvajanje primljenog signala iz šuma.

Primljeni signal prosljeđujemo u IQ demodulator kako bismo od primljenog signala dobili analitički signal koji dalje možemo obrađivati. Analitički signal sastoji se od dvije komponente, I i Q, koje kreiramo odvojeno. Miješamo primljeni signal $p(t)$ s nosiocem $\cos(\omega_0 t)$ i $\sin(\omega_0 t)$ i dobivene signale propuštamo kroz niskopropusni filter kako bismo odstranili visokofrekvencijski nosioc. Impuls $s(t)$, kojega smo modulirali na nosioc, ima uži spektar od frekvencije nosioca ω_0 što nam omogućuje korištenje IQ postupka u procesu generiranja analitičkog signala. Nakon miješanja dolaznog signala s $\cos(\omega_0 t)$ dobijemo dvije komponente

$$p(t) \cos(\omega_0 t) = s\left(t - \frac{2R}{c}\right) \cos\left(\omega_0\left(t - \frac{2R}{c}\right)\right) \cos(\omega_0 t) \quad (5.14)$$

$$= \frac{1}{2} s\left(t - \frac{2R}{c}\right) \left[\cos\left(2\omega_0 t - \frac{2\omega_0 R}{c}\right) + \cos\left(-\frac{2\omega_0 R}{c}\right) \right], \quad (5.15)$$

jednu na visokoj frekvenciji $2\omega_0$, a drugu na frekvenciji 0. Niskopropusnim filtrom odstranit ćemo visokofrekvencijsku komponentu i dobiti I komponentu analitičkog signala

$$I(t) = F_{NP}\left(p(t) \cos(\omega_0 t)\right) = \frac{1}{2} s\left(t - \frac{2R}{c}\right) \cos\left(-\frac{2\omega_0 R}{c}\right). \quad (5.16)$$

Kako bismo dobili Q komponentu miješamo primljeni signal sa $\sin(\omega_0 t)$ i dobijemo dvije komponente

$$p(t) \sin(\omega_0 t) = s \left(t - \frac{2R}{c} \right) \cos \left(\omega_0 \left(t - \frac{2R}{c} \right) \right) \sin(\omega_0 t) \quad (5.17)$$

$$= \frac{1}{2} s \left(t - \frac{2R}{c} \right) \left[\cos \left(2\omega_0 t - \frac{2\omega_0 R}{c} \right) - \sin \left(\frac{2\omega_0 R}{c} \right) \right] \quad (5.18)$$

od kojih je kao i u prethodnom slučaju jedna na visokoj frekvenciji $2\omega_0$, a drugu na frekvenciji 0. Prolaskom signala kroz niskopropusni filter dobit ćemo Q komponentu analitičkog signala

$$I(t) = F_{NP} \left(p(t) \sin(\omega_0 t) \right) = \frac{1}{2} s \left(t - \frac{2R}{c} \right) \sin \left(-\frac{2\omega_0 R}{c} \right). \quad (5.19)$$

Ukupni analitički signal dan je kompleksnom kombinacijom dobivenih I i Q komponenti iz primljenog signala

$$a(t) = \frac{1}{2} s \left(t - \frac{2R}{c} \right) e^{-i \frac{2\omega_0 R}{c}}. \quad (5.20)$$

U dobivenom analitičkom signalu možemo primijetiti nekoliko dijelova. Impuls $s(t)$ koji smo modulirali na nosioc vratio nam se sa $\frac{2R}{c}$ vremenskog kašnjenja što je upravo ono što smo i očekivali. Prije smo već argumentirali da nam ukupna amplituda, ako smo uspjeli izdvojiti signal iz šuma, više nije bitna. Informacija o udaljenosti objekta pohranjena je u fazi analitičkog signala i iz toga je želimo izdvojiti. Možemo primijetiti i da se u fazi analitičkog signala nigdje ne nalazi vrijeme i nema promjene vremena. Faza primljenog analitičkog signala je konstantna jer je objekt koji smo snimili statičan.

Napomena 5.1 — Model primljenog analitičkog signala u slučaju statičnog objekta.

Na izlazu iz prijamnika dobijemo analitički signal koji možemo interpretirati kroz model

$$a(t) = \frac{1}{2} s \left(t - \frac{2R}{c} \right) e^{-i \frac{2\omega_0 R}{c}}. \quad (5.21)$$

Vidimo da su u fazi signala pohranjena tri parametra od kojih je ω_0 parametar sustava, c brzina svjetlosti, brzina kojom se gibaju elektromagnetski valovi u slobodnom prostoru i R , nepoznata udaljenost objekta kojeg smo snimili radarom. Iz izведенog modela i parametara sustava možemo procijeniti udaljenost R . ■

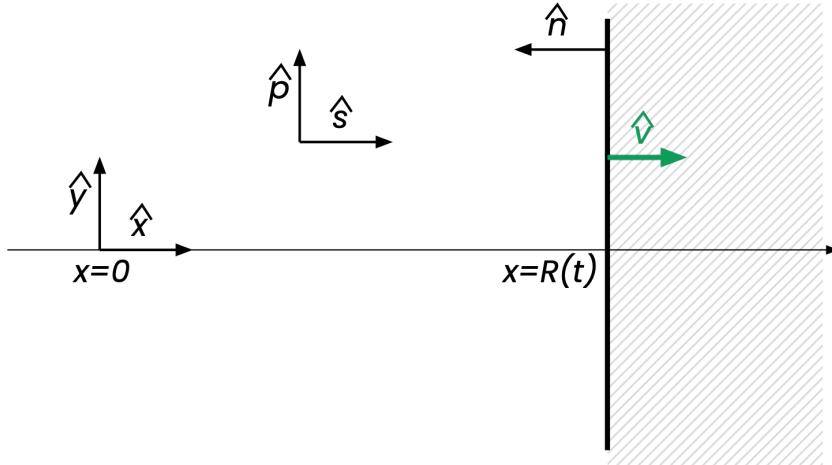
U sljedećem potpoglavlju vidjet ćete na praktičnom primjeru kako se korištenjem izvedenog matematičkog modela interpretiraju podaci snimljeni radarskim snimljenim objektima.

5.2 Mjerenje udaljenosti nepoznatog objekta

5.3 Model primljenog signala u slučaju objekta koji se kreće

Analizirat ćemo postupak detekcije metalnog objekta koji se nalazi na nepoznatoj udaljenosti i kreće se nepoznatom brzinom u nepoznatom smjeru. Kao i u slučaju detekcije statičnog metalnog objekta pretpostavit ćemo da smo u slučaju koji možemo dobro aproksimirati jednodimenzionalnim modelom. Na slici 5.3 možemo vidjeti geometriju problema.

Kao i u slučaju statičnog objekta ishodište koordinatnog sustava postavili smo na mjesto našeg radara. Nepoznati metalni objekt kreće se po nepoznatoj trajektoriji $x = R(t)$. Objekt je napravljen od savršenog metala. U radaru generiramo kratkotrajni impuls $s(t)$ i moduliramo ga na



Slika 5.3: Geometrija problema u slučaju detekcije objekta koji se kreće nepoznatom brzinom u nepoznatom smjeru.

visokofrekvenički nosioc $\cos(\omega_0 t)$. Tako modulirani signal označavamo s $f(t) = s(t) \cos(\omega_0 t)$. U slobodni prostor odašiljemo incidentni elektromagnetski val

$$\mathbf{E}_{in}(x, t) = \mathbf{E}_0 f\left(t - \frac{x}{c}\right) = \hat{y} E_0 f\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (5.22)$$

Incidentni elektromagnetski val dolazi do metalnog objekta koji se kreće, od njega se reflektira i nastaje raspršeni val koji se giba u suprotnom smjeru od incidentnog vala. Ukupno električno polje u svakoj točki prostora i svakom vremenskom trenutku dano je sumom

$$\mathbf{E}_{uk}(x, t) = \mathbf{E}_{in}(x, t) + \mathbf{E}_{sc}(x, t). \quad (5.23)$$

Kao i u prethodnom slučaju, raspršeni val dan je izrazom

$$\mathbf{E}_{sc} = \mathbf{E}_s g\left(t + \frac{x}{c}\right), \quad (5.24)$$

u kojem su \mathbf{E}_s amplituda raspršenog vala, a g nepoznata funkcija koja opisuje gibanje vala. Te dvije nepoznate funkcije odredit ćemo iz jednadžbe za rubni uvjet na površini metala iz koje dobijemo izraz

$$\hat{n} \times \mathbf{E}_{sc}(R(t), t) = -\hat{n} \times \mathbf{E}_{in}(R(t), t). \quad (5.25)$$

Uvrstimo li oblik incidentnog i raspršenog vala u prethodnu jednadžbu za amplitudu raspršenog vala dobijemo isti izraz kao i u prethodnom primjeru $\mathbf{E}_s = -\mathbf{E}_0$. Amplituda ne ovisi o tome giba li se metalni objekt ili je statičan jer u oba slučaja imamo totalnu refleksiju na metalu koja okreće dolazni val u fazi za 180 stupnjeva. Za razliku od prethodnog primjera sa statičnim objektom, u kojemu položaj objekta nije funkcija vremena, u ovom primjeru ne možemo se poslužiti zamjenom varijabli

$$u = t + \frac{R(t)}{c} \quad (5.26)$$

kako bismo odredili nepoznatu funkciju g u jednakosti

$$g\left(t + \frac{R(t)}{c}\right) = f\left(t - \frac{R(t)}{c}\right) \quad (5.27)$$

jer ne možemo riješiti problem inverzne transformacije $t = t(u)$. Mi ne poznajemo trajektoriju po kojoj se giba metalni objekt, a bez poznавања trajektorije ne možemo odrediti funkciju $t = t(u)$. Pitanje je kako podesiti parametre sustava tako da iako ne znamo trajektoriju $x = R(t)$ po kojoj se giba objekt kojeg snimamo ipak možemo napraviti inverziju i dobiti $t = t(u)$. Ideja je da odašiljemo vrlo kratke impulse $s(t)$, toliko kratke se za vrijeme interakcije između poslanog elektromagnetskoga vala i objekta objekt ne može pomaknuti za veliku udaljenost. S druge strane ne smijemo zaboraviti da spektar impulsa mora biti dosta niži od ω_0 kako bismo korištenjem IQ postupka mogli dobiti dobru aproksimaciju analitičkog signala. U slučaju kratkotrajnog impulsa $s(t)$ iako ne znamo eksplicitno trajektoriju $x = R(t)$ možemo ju aproksimirati linearnom aproksimacijom

$$R(t) \approx R + vt. \quad (5.28)$$

U aproksimaciji se javljaju dva parametra, R koji predstavlja udaljenost objekta u trenutku kada incidentni val dođe do njega i v što je trenutna brzina kojom se objekt kreće u trenutku kada incidentni val dođe do njega. U navedenoj aproksimaciji vrijeme t počinjemo mjeriti od trenutka kada incidentni val dođe do nepoznatog objekta. Važno je napomenuti da parametre R i v ne poznajemo, ali se nadamo da ćemo ih uspjeti odrediti iz primljenog signala, pomoću modela koji izvedemo. Korištenjem navedene aproksimacije invertiramo zamjenu varijabli

$$u = u(t) = t + \frac{R(t)}{c} = t + \frac{R + vt}{c} = t \left(1 + \frac{v}{c}\right) + \frac{R}{c} \quad (5.29)$$

i dobijemo

$$t = t(u) = \frac{u - \frac{R}{c}}{1 + \frac{v}{c}}. \quad (5.30)$$

U izrazu za $t = t(u)$ javlja nam se dodatni faktor $(1 + \frac{v}{c})^{-1}$. Vidjet ćemo kasnije što nam on mijenja u ukupnom modelu primljenog signala. Vratimo li se natrag na funkciju jednakost 5.27 kako bismo korištenjem aproksimacije odredili nepoznatu funkciju g dobijemo

$$g(u) = f \left(t(u) - \frac{R(t)}{c} \right) = f \left(t(u) - \frac{R + vt(u)}{c} \right) = f \left(\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}} \left(u - \frac{R}{c} \right) - \frac{R}{c} \right). \quad (5.31)$$

Vidimo da nam se u funkcijskoj jednakosti javljaju dodatni faktori u odnosu na slučaj statičnog objekta koji množi vremensko kašnjenje. Vrijedi da je raspršeno polje \mathbf{E}_{sc} jednako

$$\mathbf{E}_{sc}(x, t) = \mathbf{E}_s g \left(t + \frac{x}{c} \right) = -\mathbf{E}_0 f \left(\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}} \left(t + \frac{x}{c} - \frac{R}{c} \right) - \frac{R}{c} \right). \quad (5.32)$$

U izrazu za raspršeno polje možemo vidjeti razliku u vremenu kašnjenja u odnosu na to giba li se objekt prema radaru ili od radara. Putem incidentnog vala do prepreke unosi se kašnjenje od $\frac{R}{c}$, ali na putu natrag javlja se promjena vremenskog kašnjenja u iznosu

$$\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}} \frac{R}{c} \quad (5.33)$$

koja ovisi o smjeru gibanja objekta. U slučaju kada se objekt udaljuje od radara brzina gibanja v je pozitivna pa je ukupno kašnjenje signala manje od $\frac{2R}{c}$. Ako se objekt približava radaru onda je brzina gibanja v negativna pa je ukupno kašnjenje veće od $\frac{2R}{c}$. Ako se prepreka ne pomiče onda je brzina v jednaka 0 pa je kašnjenje točno jednako $\frac{2R}{c}$. Opisani efekt preslikan u frekvenciju primljenog signala zove se Dopplerov pomak. Signal na prijamnoj anteni jednak je

$$p(t) = f \left(\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}} \left(t - \frac{R}{c} \right) - \frac{R}{c} \right) = s \left(\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}} \left(t - \frac{R}{c} \right) - \frac{R}{c} \right) \cos \left[\omega_0 \left(\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}} \left(t - \frac{R}{c} \right) - \frac{R}{c} \right) \right].$$

U primljenom signalu možemo vidjeti utjecaj Dopplerovog pomaka na frekvenciju primljenog signala. Javlja se član

$$\omega_0 \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}} \quad (5.34)$$

koji prethodno opisano prevodi u promjenu frekvencije primljenog signala. Taj član zove se Dopplerov pomak frekvencije. Ako se objekt udaljuje od radara dolazi do smanjenja frekvencije primljenog signala do u slučaju u kojem se objekt približava radaru dolazi do povećanja frekvencije primljenog signala. Upravo na taj način, očitavanjem promjene frekvencije primljenog signala ili Dopplerovog pomaka odredit ćemo smjer gibanja nepoznatog objekta. U svim praktičnim primjenama vrijedi da je brzina gibanja nepoznatog objekta puno manja od brzine svjetlosti $\frac{v}{c} \ll 1$. To znači da izraz za Dopplerov pomak možemo dodatni pojednostaviti korištenjem aproksimacije

$$\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}} = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \left(1 - \frac{v}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right) = 1 - \frac{2v}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right). \quad (5.35)$$

Time izraz za Dopplerov pomak prelazi u poznati izraz

$$\omega_D = \frac{2v}{c} \omega_0, \quad (5.36)$$

a primljeni signal dan je izrazom

$$p(t) = s \left(\left(1 - \frac{2v}{c}\right) \left(t - \frac{R}{c}\right) - \frac{R}{c} \right) \cos \left[(\omega_0 - \omega_D) \left(t - \frac{R}{c}\right) - \frac{\omega_0 R}{c} \right].$$

Sustav smo kreirali tako da je najviša frekvencija u spektru impulsa $s(t)$ puno niža od frekvencije ω_0 . U tom slučaju signal s mijenja se sporije u odnosu na nosioc pa je

$$s \left(\left(1 - \frac{2v}{c}\right) \left(t - \frac{R}{c}\right) - \frac{R}{c} \right) \approx s \left(t - \frac{2R}{c} \right) \quad (5.37)$$

što analizu IQ postupka čini jednostavnijom.

NAPOMENA: opiši relativizam i relativnu brzinu između dva objekta koji se kreću u specijalnoj relativnosti te poveži to s Dopplerom.

Primljeni signal

$$p(t) = s \left(t - \frac{2R}{c} \right) \cos \left[(\omega_0 - \omega_D) \left(t - \frac{R}{c}\right) - \frac{\omega_0 R}{c} \right].$$

prosljeđujemo u IQ demodulator. Miješamo primljeni signal $p(t)$ s nosiocem $\cos(\omega_0 t)$ i $\sin(\omega_0 t)$ i dobivene signale propuštamo kroz niskopropusni filter kako bismo odstranili visokofrekvenčni nosioc. Impuls $s(t)$, kojega smo modulirali na nosioc, ima uži spektar od frekvencije nosioca ω_0 što nam omogućuje korištenje IQ postupka u procesu generiranja analitičkog signala. Nakon miješanja dolaznog signala s $\cos(\omega_0 t)$ dobijemo dvije komponente

$$p(t) \cos(\omega_0 t) = s \left(t - \frac{2R}{c} \right) \cos \left((\omega_0 - \omega_D) \left(t - \frac{R}{c}\right) - \frac{\omega_0 R}{c} \right) \cos(\omega_0 t) \quad (5.38)$$

$$= \frac{1}{2} s \left(t - \frac{2R}{c} \right) \left[\cos \left(\omega_0 \left(2t - \frac{R}{c}\right) - \omega_D \left(t - \frac{R}{c}\right) - \frac{2\omega_0 R}{c} \right) + \cos \left(-\omega_D \left(t - \frac{R}{c}\right) - \frac{2\omega_0 R}{c} \right) \right], \quad (5.39)$$

jednu na visokoj frekvenciji $2\omega_0$, a drugu na frekvenciji Dopplerovog pomaka ω_D što je puno niža frekvencija od frekvencije nosioca. Niskopropusnim filtrom odstranit ćemo visokofrekveničku komponentu i dobiti I komponentu analitičkog signala

$$I(t) = F_{NP}\left(p(t)\cos(\omega_0 t)\right) = \frac{1}{2}s\left(t - \frac{2R}{c}\right)\cos\left(-\omega_D\left(t - \frac{R}{c}\right) - \frac{2\omega_0 R}{c}\right). \quad (5.40)$$

Kako bismo dobili Q komponentu miješamo primljeni signal sa $\sin(\omega_0 t)$ i dobijemo dvije komponente

$$p(t)\sin(\omega_0 t) = s\left(t - \frac{2R}{c}\right)\cos\left((\omega_0 - \omega_D)\left(t - \frac{R}{c} - \frac{\omega_0 R}{c}\right)\right)\sin(\omega_0 t) \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}s\left(t - \frac{2R}{c}\right)\left[\sin\left(\omega_0\left(2t - \frac{R}{c}\right) - \omega_D\left(t - \frac{R}{c}\right) - \frac{\omega_0 R}{c}\right)\right. \\ &\quad \left.+ \sin\left(-\omega_D\left(t - \frac{R}{c}\right) - \frac{2\omega_0 R}{c}\right)\right], \end{aligned} \quad (5.42)$$

od kojih je kao i u prethodnom slučaju jedna na visokoj frekvenciji $2\omega_0$, a drugu na frekvenciji Dopplerovog pomaka ω_D . Prolaskom signala kroz niskopropusni filter dobit ćemo Q komponentu analitičkog signala

$$I(t) = F_{NP}\left(p(t)\sin(\omega_0 t)\right) = \frac{1}{2}s\left(t - \frac{2R}{c}\right)\sin\left(-\omega_D\left(t - \frac{R}{c}\right) - \frac{2\omega_0 R}{c}\right). \quad (5.43)$$

Ukupni analitički signal dan je kompleksnom kombinacijom dobivenih I i Q komponenti iz primljenog signala

$$a(t) = \frac{1}{2}s\left(t - \frac{2R}{c}\right)e^{-i\omega_D\left(t - \frac{R}{c}\right)}e^{-i\frac{2\omega_0 R}{c}}. \quad (5.44)$$

U modelu primljenog analitičkog signala očituju se svi parametri nepoznatog objekta, njegova udaljenost R te brzina i smjer gibanja v .

Napomena 5.2 — Model primljenog analitičkog signala u slučaju objekta koji se kreće.

Na izlazu iz prijamnika dobijemo analitički signal koji možemo interpretirati kroz model

$$a(t) = \frac{1}{2}s\left(t - \frac{2R}{c}\right)e^{-i\omega_D\left(t - \frac{R}{c}\right)}e^{-i\frac{2\omega_0 R}{c}}. \quad (5.45)$$

Za razliku od snimanja statičnog objekta sada u fazi signala imamo vremensku promjenu i to vremensku promjenu uzrokovana Dopplerovom frekvencijom ω_D . Frekvencijskom analizom primljenog signala dolazimo do informacije o Dopplerovoj frekvenciji, a time i to nepoznate brzine objekta kojeg smo snimili radarom. Kao i u slučaju statičnog objekta imamo i fiksni fazni pomak u analitičkom signalu i taj fazni pomak uzrokovani su upravo udaljenosću objekta. ■

5.4 Mjerenje brzine nepoznatog objekta

6. Korelacijski prijamnik

U uvodnom poglavlju vidjeli smo osnovnu radarsku jednadžbu koja povezuje rezoluciju radara s parametrima kao što su radna frekvencija, snaga koju odašiljemo i svojstva antenskog sustava koji koristimo

$$\frac{P_p}{P_{rad}} = \frac{\sigma A_{ef}^2}{4\pi\lambda^2 R^4}. \quad (6.1)$$

U izvedenim modelima za detekciju nepoznatog objekta vidjeli smo da impuls koji moduliramo i šaljemo mora biti kratak kako bi model mogli koristiti za detekciju smjera i brzine gibanja nepoznatog objekta. Problem je što je energija spremljena u kratkim impulsima mala pa postoji mogućnost da raspršeni val koji detektiramo potone u šum. Prelazeći dva puta put duljine R znaga primljenog signala padne s četvrtom potencijom udaljenosti, signal koji se vratio do nas ima R^4 puta nižu snagu od signala koji smo odaslali u zrak. To znači da na udaljenosti od 30 km primljena snaga padne s faktorom

$$(30 \cdot 10^3)^4 = 3^4 \cdot 10^4 \cdot 10^{12} = 81 \cdot 10^{16} \approx 10^{18}. \quad (6.2)$$

Proces detekcije tako niske razine signala iz šuma riješio je D. O. North u poznatom izvještaju An Analysis of the factors which determine signal/noise discrimination in pulsed-carrier systems iz 1948. godine koji je 1963. godine objavljen kao rad u Proceedings of the IEEE [18]. Riječ je o tehničkoj kompresiji pulsa koja se bazira na metodi prilagođenog filtra. Radimo korelaciju primljenog signala sa signalom koji smo poslali, tj. u primljenom signalu tražimo repliku poznatog signala. U radarskim primjenama tako nešto je moguće jer uvijek znamo impuls $s(t)$ koji šaljemo.

6.1 Prilagodeni filter

Analizirat ćemo sustav s linearним aditivnim bijelim šumom, tj. šum ćemo dodati na primljeni signal. U tom slučaju primljeni signal, koji kasni za vrijeme $\tau = \frac{2R}{c}$ u odnosu na poslani signal, možemo modelirati kao

$$p_r(t) = As(t - \tau) + n(t) \quad (6.3)$$

gdje je n aditivan bijeli šum, a A faktor prigušenja signala. Aditivan bijeli šum opisan je Gaussovom distribucijom očekivanja 0 i devijacije σ_n . Snaga šuma jednaka je upravo varijanci šuma σ_n^2 .

Primljeni signal vodimo u filter kojim pokušavamo odstraniti šum. Ne znamo o kojem je filtru riječ. Analizom primljenog signala i sustava kroz koji primljeni signal prolazi, pokušat ćemo otkriti kakav filter ima smisla koristiti. Koristit ćemo linearan, vremenski invarijantan filter. To znači da je izlaz iz tog filtra dan konvolucijom ulaza i impulsnog odziva

$$y(t) = (h * p_r)(t) = A\eta_s(t) + \eta_n(t) \quad (6.4)$$

gdje je

$$\begin{aligned} \eta_s(t) &= (h * s)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)s(u-\tau) du, \\ \eta_n(t) &= (h * n)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-v)n(v) dv. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Tražimo filter, tj. impulsni odziv filtra, koji će isfiltrirati dolazni signal na način da je

$$\eta_s(t) \gg \eta_n(t) \quad (6.6)$$

u trenutku dolaska signala, tj. u trenutku $t = \tau = \frac{2R}{c}$. U procesu validacije filtra koristit ćemo odnos signal šum

$$SNR = \frac{P_s}{P_n}. \quad (6.7)$$

Cilj je postići što veći mogući odnos signal šum. Vidjeli smo već prije da je primljeni signal jednak $p = s + n$ gdje je s deterministički dio signala, a n je šum tj. stohastički dio signala. U slučaju mjerjenja mi mjerimo signal p u kojemu se nalazi i deterministički i stohastički dio. Odnos signal šum u slučaju korištenog modela signala jednak je

$$SNR(t) = \frac{|s|^2}{\sigma_n^2} = \frac{|\eta_s(t)|^2}{E(|\eta_n(t)|^2)} \quad (6.8)$$

i mi želimo maksimizirati odnos signal šum u trenutku $t = \tau$.

Snaga šuma dana je očekivanjem

$$\begin{aligned} E(|\eta_n(t)|^2) &= E\left(\left|\int_{-\infty}^{\infty} h(t-v)n(v) dv\right|^2\right) \\ &= E\left(\left|\int_{-\infty}^{\infty} h(t-v)n(v) dv\right| \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)n(u) du\right|^*\right) \\ &= E\left(\left|\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-v)h^*(t-u)n(v)n^*(u) du dv\right|\right). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Unutar prethodnog izraza nalazi se impulsni odziv filtra što je deterministički dio izraza i šum što je stohastički dio prethodnog izraza. Očekivanje je linearni operator što znači da prethodni izraz postaje

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-v)h^*(t-u)E(n(v)n^*(u)) du dv. \quad (6.10)$$

Izraz $E(n(u)n^*(v))$ je autokorelacijska funkcija bijelog šuma. Vrijedi da je

$$R_n(u, v) = E(n(u)n^*(v)) = N\delta(u - v). \quad (6.11)$$

Bijeli um sličan je samom sebi samo u trenutku $u = v$, a u svim ostalim trenucima potpuno je različit. Oznakom N označavamo snagu šuma. Korištenjem izraza za autokorelaciju bijelog šuma snaga šuma postaje

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-v)h^*(t-u)N\delta(u-v) du dv = N \int_{-\infty}^{\infty} h(t-v)h^*(t-v) dv = N \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt. \quad (6.12)$$

Snaga signala jednaka je

$$|\eta_n(\tau)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau-u)s(u-\tau) du \right|^2 = \left| \frac{\tau-u=t}{-du=dt} \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(t)s(-t) dt \right|^2. \quad (6.13)$$

Ukupni odnos signal šum dan je omjerom prethodna dva izraza kao

$$SNR = \frac{|\eta_s(t)|^2}{E(|\eta_n(t)|^2)} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} h(t)s(-t) dt \right|^2}{N \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt}. \quad (6.14)$$

Primijenimo li Cauchy-Schwarzovu nejednakost 9.3 na prethodni izraz dobijemo da je

$$SNR \leq \frac{\left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |s(-t)|^2 dt \right)}{N \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt}{N}. \quad (6.15)$$

Najveći mogući odnos signal šum jednak je

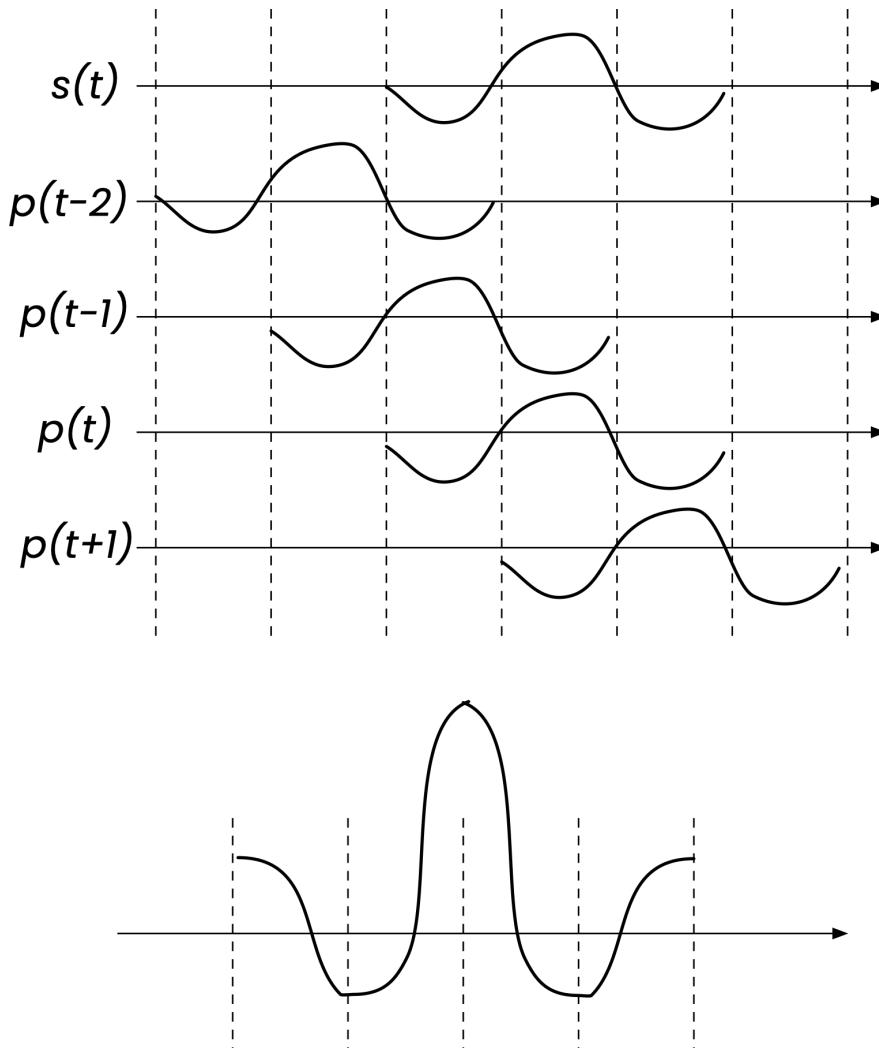
$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt}{N} \quad (6.16)$$

i on se postiže u trenutku kada je $h(t) = s^*(-t)$. Filter čiji je impulsni odziv povezan sa signalom koji filtrira na način da je $h(t) = s^*(-t)$ zove se prilagođeni filter. Kako bismo postigli najveći mogući odnos signal šum na prijamniku moramo konvoluirati primljeni signal s vremenski okrenutom kopijom signala koji očekujemo da ćemo primiti. U slučaju radarskih primjena to je moguće napraviti jer očekujemo da ćemo primiti upravo onaj oblik signala koji smo i poslali. Na njega će biti superponiran šum i signal će biti prigušen, ali imat će isti oblik jer ne očekujemo nelinearna izobličenja. U radarskoj primjeni mi znamo signal koji šaljemo i koji očekujemo da ćemo primiti. U dodatnim dijelovima tog signala očekujemo informacije o objektu od kojega se poslani val odbio i vratio natrag. Može se pokazati da je prilagođeni filter optimalan linearni filter koji maksimizira odnos signal šum u situaciji aditivnog bijelog šuma.

Propustimo li signal kroz prilagođeni filter dobijemo signal na prijamniku

$$\begin{aligned} \eta(t) &= (h * p_r)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)p_r(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(u-t)p_r(u) du = \left| \frac{u-t=v}{du=dv} \right| \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s^*(v)p_r(v+t) dv = R_{s,p_r}(t). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Nakon prolaska kroz prilagođeni filter primljeni signal jednak je korelacijskoj funkciji između poslanog impulsa s i primljenog signala p_r . Ovim postupkom tražimo repliku poslanog signala s u primljenom signalu p_r . Prilagođeni filter poboljšava odnos signal šum u prijamniku koncentrirajući energiju u primljenom signalu oko trenutka $\tau = \frac{2R}{c}$ što odgovara idealnom kašnjenju signala reflektoranom od objekta na udaljenosti R od radara.



Slika 6.1: Princip rada prilagođenog filtra. Signal s predstavlja poslani signal dok je p primljeni signal u kojem tražimo repliku poslanog signala. Slika preuzeta iz [17].

Napomena 6.1 Jedno od otvorenih znanstvenih pitanja u području radara je pitanje dizajna impulsa s kod kojih će najmanje energije biti skoncentrirano u bočnim laticama nakon prolaska signala kroz prilagođeni filter. ■

Spomeni time reversal kod imaginga i valne jednadžbe, Mathias Fink

6.2 Signali koje koristimo u primjeni

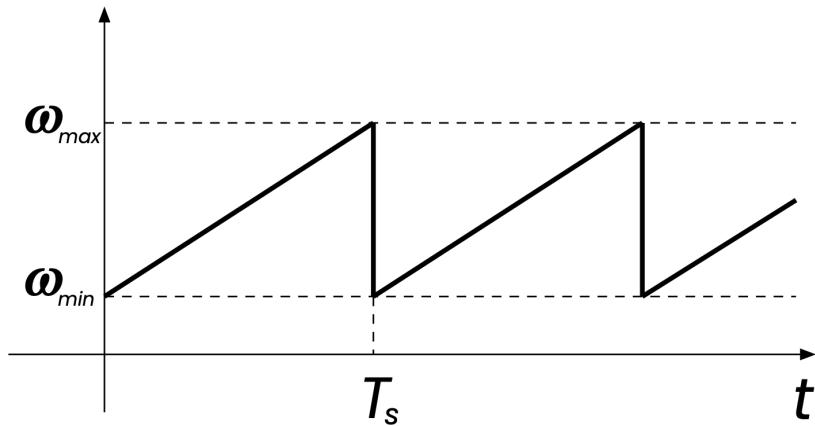
Visokofrekvenčna pojačala najefikasnija su kada se ne mijenja amplituda signala, a pogotovo kada ona ne prolazi kroz nulu. Idealno bi bilo koristiti signale konstantne amplitude

$$H_{[0,T_s]}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T_s, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \quad (6.18)$$

kojima je sva promjena spremljena u fazi $\phi(t)$. Takav oblik signala zovemo signal s linearom modulacijom frekvencije (eng. linear frequency modulated signal ili LFM). Pripadni analitički signal jednak je

$$s(t) = H_{[0,T_s]}(t)e^{i\phi(t)}. \quad (6.19)$$

■ **Primjer 6.1 — CHIRP signal.** Najčešće korišteni valni oblik signala s u radarskim primjenama je chirp. Riječ je o signalu konstantne amplitude čija se frekvencija linearno mijenja u vremenu. Na slici 6.2 možemo vidjeti linearnu promjenu frekvencije chirpa u nekoliko uzastopnih perioda signala. Trenutna kružna frekvencija chirpa mijenja se u rasponu $[\omega_{min}, \omega_{max}]$ u razdoblju od T_s sekundi. Razliku $\frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{2\pi} = f_{max} - f_{min}$ zovemo još i širina pojasa chirpa.



Slika 6.2: Promjena frekvencije signala chirp.

Glavni parametar kod chirpa je parametar γ kojeg zovemo nagib chirpa i koji je u slučaju chirpa sa slike 6.2 jednak

$$\gamma = \frac{f_{max} - f_{min}}{T_s}. \quad (6.20)$$

U ovisnosti o tome radi li se o signalu kod kojega počinjemo s visokom frekvencijom ω_{max} i onda frekvencija signala linearno pada prema ω_{min} ili signal kreće s ω_{min} i onda mu frekvencija linearno raste prema ω_{max} razlikujemo upchirp ili downchirp. U slučaju signala kod kojega frekvencija raste vrijedi da je nagib chirpa $\gamma > 0$ dok je u slučaju chirpa kojemu frekvencija pada $\gamma < 0$.

U slučaju upchirpa frekvencija signala raste nagibom chirpa γ počevši od najmanje kružne frekvencije ω_{min} . Tu frekvencijsku promjenu modeliramo linearom funkcijom

$$\phi'(t) = \omega_{min} + 2\pi\gamma t. \quad (6.21)$$

Vrijedi da je $\omega_{max} = \omega_{min} + 2\pi\gamma T_s$. Centralna frekvencija promjene jednaka je

$$\omega_0 = \frac{\omega_{min} + \omega_{max}}{2} = \omega_{min} + \pi\gamma T_s. \quad (6.22)$$

Promjena kružne frekvencije signala je u rasponu $[\omega_{min}, \omega_{max}] = [\omega_0 - \pi\gamma T_s, \omega_0 + \pi\gamma T_s]$. Faza signala jednaka je integralu kružne frekvencije

$$\phi(t) = \omega_{min}t + \pi\gamma t^2 \quad (6.23)$$

pa je pripadni analitički signal jednak

$$s(t) = H_{[0, T_s]}(t) e^{i(\omega_{min}t + \pi\gamma t^2)}. \quad (6.24)$$

■

Radar sa sintetičkom aperturom (SAR)

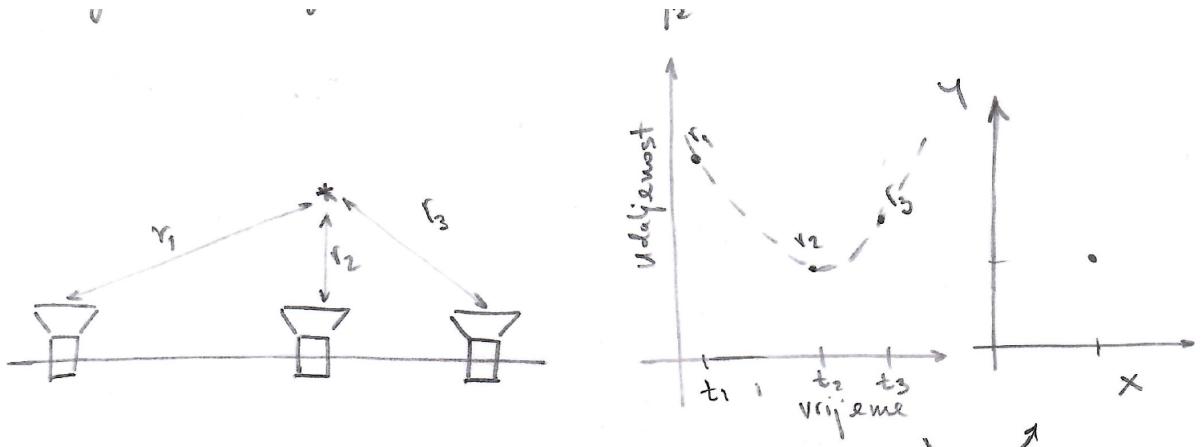
7	Radar sa sintetičkom aperutorm	83
7.1	FMCW radar	
7.2	Primljeni signal kod SAR radara	
8	Omega-k algoritam	85
8.1	Izvod Omega-k algoritma	
8.2	Implementacija Omega-k algoritma	



7. Radar sa sintetičkom aperutom

7.1 FMCW radar

Za dobivanje udaljenosti u svakom koraku, SAR radar koristi FMCW radar koji šalje i prima chirp signale i miješa ih kako bi pomoću razlika u frekvencijama između poslanog i primljenog signala izračunao udaljenost od objekta.



Slika 7.1: Princip snimanja i kreiranja slike snimljene radarem sa sintetičkom aperturom.

7.2 Primljeni signal kod SAR radara

8. Omega-k algoritam

Algoritmi za rekonstrukciju snimljene SAR slike dijele se na algoritme u vremenskoj domeni i algoritme u frekvencijskoj domeni. Primjenjuju se u ovisnosti o načinu na koji je snimljena SAR slika koju je potrebno rekonstruirati jer imaju različite uvjete pod kojima djeluju. Osnovna pretpostavka koju mora zadovoljavati slika snimljena SAR radarem na koju se želi primijeniti algoritam u frekvencijskoj domeni je ravna trajektorija snimanja i konstantna brzina gibanja radara. U slučaju kada to nije ispunjeno potrebno je koristiti algoritme za kompenzaciju. Algoritmi za rekonstrukciju slike u vremenskoj domeni fleksibilniji su za korištenje jer ne zahtijevaju ravnu trajektoriju niti konstantnu brzinu gibanja radara. No, složenost takvih algoritama je $\mathcal{O}(n^3)$ dok je složenost algoritama u frekvencijskoj domeni reda $\mathcal{O}(n^2 \log_2(n))$.

Osnovni cilj algoritma koji ćemo izvesti je dati interpretaciju snimljenih podataka. Nakon što interpretiramo podatke koraci algoritma bit će jasni sami za sebe.

8.1 Izvod Omega-k algoritma

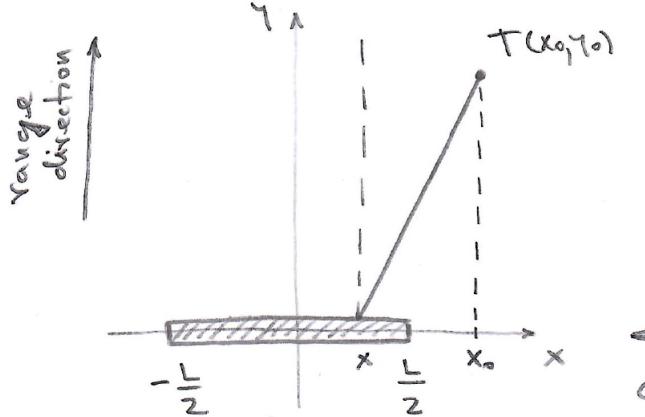
Za vrijeme snimanja radarem sa sintetičkom aperturom senzor ponavlja mjerjenje dok se pomici ravno po liniji konstantnom brzinom v . Na slici 8.1 prikazana je geometrija.

Objekt koji snimamo postavili smo u točku (x_0, y_0) . Senzor radara kreće se po x -osi između točaka $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ konstantnom brzinom v . Senzor odašilje chirp impulse duljine trajanja T_s i od početka snimanja brojimo periode varijablu n . Od trenutka kada senzor kreće emitirati impuls mjerimo lokalno vrijeme varijablu t koju na kraju impulsa postavimo u $t = 0$ i uvečamo varijablu n za 1. Položaj senzora, nakon što je već emitirao n perioda signala s, dan je varijablu

$$x = x_n + vt \tag{8.1}$$

gdje $x_n = vnT_s$ predstavlja položaj senzora na kraju n -te periode impulsa. U svakoj točki snimanja udaljenost između objekta i senzora iznosi

$$R(x) = \sqrt{(x_0 - x)^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0 - x_n - vt)^2 + y_0^2}. \tag{8.2}$$



Slika 8.1: Geometrija.

Senzor šalje rastuće chirpove trajanja T_s opisane analitičkim signalom

$$s(t) = e^{i(2\pi f_{min}t + \pi\gamma t^2)} \quad (8.3)$$

za lokalno vrijeme $0 \leq t < T_s$. Poslani signal reflektira se od prepreke i vraća natrag na senzor nakon vremena τ_d

$$s_r(t, x) = s_t(t - \tau_d). \quad (8.4)$$

Primljeni signal funkcija je dvije varijable, lokalnog vremena t koje mjerimo od trenutka kada krenemo emitirati impuls te prostorne varijable x kojom označavamo položaj senzora u tom trenutku. Na senzoru miješamo primljeni signal kako bismo odstranili visokofrekvencijsku komponentu u signalu. Dobijemo

$$\begin{aligned} s(t, x) &= s_r(t)s_t^*(t) = s_t(t - \tau_d)s_t^*(t) = e^{i(2\pi f_{min}t - 2\pi f_{min}\tau_d + \pi\gamma(t - \tau_d)^2)}e^{-i(2\pi f_{min}t + \pi\gamma t^2)} \\ &= e^{-2\pi i(f_{min} + \gamma t)\tau_d}e^{\pi i\gamma\tau_d^2}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Vrijeme kašnjenja signala τ_d određeno je udaljenošću objekta do senzora, tj. $\tau_d = \frac{2R(x)}{c}$. Primljeni signal jednak je

$$s(t, x) = e^{-i\frac{4\pi}{c}(f_{min} + \gamma t)R(x)}e^{i\frac{4\pi\gamma}{c^2}R^2(x)}. \quad (8.6)$$

Drugi član u prethodnom izrazu zove se rezidualna faza (eng. Residual Video Phase ili RVP). On nastaje zbog linearног porasta frekvencije u posланом signalu što rezultira kvadratnim članom u fazi posланог signala i vremenom koji se u njemu javlja. Rezidualnu fazu odstranjujemo jer ona negativno utječe na чистоју radarske slike koju želimo rekonstruirati što direktno utjeće i na rezoluciju radara koji koristimo. Najjednostavnije bilo bi pomnožiti primljeni signal s negativnim članom koji sadrži rezidualnu fazu, tj. sa signalom

$$e^{-i\frac{4\pi\gamma}{c^2}R^2(x)}, \quad (8.7)$$

ali to nije moguće jer mi ne znamo udaljenost $R(x)$ između senzora i nepoznatog objekta. Kako bismo odstranili rezidualnu fazu moramo koristiti ono što imamo od informacije u našem signalu.

Lokalno vrijeme javlja se samo u prvom članu signala što znači da se cijeli signal mijenja s kružnom frekvencijom

$$\omega = \frac{4\pi\gamma R(x)}{c} = 2\pi f. \quad (8.8)$$

nepoznatu frekvenciju f možemo izraziti preko ostalih parametara kao

$$f = \frac{2\gamma R(x)}{c} = \gamma \frac{2R(x)}{c} = \gamma \tau_d. \quad (8.9)$$

To znači da se vrijeme kašnjenja τ_d može izraziti preko nagiba chirpa, što je parametar sustava koji koristimo i preko frekvencije kojom se mijenja signal

$$\tau_d = \frac{f}{\gamma}. \quad (8.10)$$

Ovom transformacijom član koji opisuje rezidualnu fazu postaje

$$e^{i\frac{4\pi\gamma}{c^2}R^2(x)} = e^{i\pi\gamma\left(\frac{2R(x)}{c}\right)^2} = e^{i\pi\gamma\tau_d^2} = e^{i\pi\frac{f^2}{\gamma}}. \quad (8.11)$$

Ovim transformacijama zamijenili smo nepoznatu udaljenost $R(x)$ ili nepoznato vrijeme kašnjenja signala τ_d s nepoznatom frekvencijom f . Razlika je u tome što primjenom Fourierove transformacije na primljenom signalu možemo izračunati frekvenciju f . Prvi korak omega-k algoritma sastoji se u kompenzaciji rezidualne faze. U njemu primjenjujemo FFT na primljenom signalu i iz provedene frekvencijske analize i dobivene dominantne frekvencije f kreiramo član

$$e^{-i\pi\frac{f^2}{\gamma}} \quad (8.12)$$

s kojim množimo cijeli primljeni signal i tako odstranjujemo rezidualnu fazu. Nakon provedene kompenzacije ostaje nam samo prvi član signala

$$s(t, x) = e^{-i\frac{4\pi}{c}(f_{min} + \gamma t)R(x)}. \quad (8.13)$$

U članu $R(x)$ javlja se položaj senzora u trenutku snimanja i koordinate objekta koji snimamo. Uvrstimo li tu udaljenost i položaj senzora u odnosu na lokalno vrijeme t dobit ćemo signal

$$s(t, x) = e^{-i\frac{4\pi}{c}(f_{min} + \gamma t)\sqrt{(x_0 - x_n - vt)^2 + y_0^2}} = s(t, x_n). \quad (8.14)$$

Sada se u primljenom signalu očituju koordinate objekta (x_0, y_0) , ali na način na koji ih ne možemo obradom signala izvaditi van. Cilj je dodatno transformirati primljeni signal kako bi se koordinate objekta pojavile u obliku pogodnom za procesiranje. Označimo li γt u prethodnom signalu kao trenutnu frekvenciju f_t vidimo da signal možemo označiti kao

$$S(f_t, x_n) = e^{-i\frac{4\pi}{c}(f_{min} + f_t)\sqrt{\left(x_0 - x_n - v\frac{f_t}{\gamma}\right)^2 + y_0^2}}. \quad (8.15)$$

Varijable u našem signalu možemo interpretirati kao Fourierove transformacije po prostornoj varijabli. Tu varijablu obično zovemo valni broj $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{c}$. Varijable u transformaciji označavat ćemo kao

$$\frac{4\pi}{c}(f_{min} + f_t) = k_{rc} + \Delta k_r = k_r \quad (8.16)$$

čime signal interpretiramo kao

$$s(k_r, x_n) = e^{-ik_r \sqrt{\left(x_0 - x_n - \frac{vc\Delta k_r}{4\pi\gamma}\right)^2 + y_0^2}}. \quad (8.17)$$

Postojećim transformacijama došli smo do signala $s(k_r, x_n)$ kojemu je jedna varijabla u Fourierovoj domeni, a druga u realnom prostoru. Na taj način interpretiramo snimljenu sliku.

Sada želimo u potpunosti prijeći u domenu valnog broja tako da x_n predstavimo valnim brojem K_x , a to možemo dobiti Fourierovom transformacijom

$$\begin{aligned} s(k_r, k_x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_r x_n} s(k_r, x_n) dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_r x_n} e^{-ik_r \sqrt{\left(x_0 - x_n - \frac{vc\Delta k_r}{4\pi\gamma}\right)^2 + y_0^2}} dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(-k_x x_n - k_r \sqrt{\left(x_0 - x_n - \frac{vc\Delta k_r}{4\pi\gamma}\right)^2 + y_0^2}\right)} dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\phi(x_n)} dx_n. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Funkcija $\phi(x_n)$ predstavlja fazu signala. Riječ je o oscilirajućem integralu kojeg rješavamo metodom stacionarne faze opisanom u poglavlju ???. Za to moramo izračunati stacionarne točke funkcije ϕ koje dobijemo izjednačavanjem derivacije faze s nulom. Iz jednadžbe $\phi'(x_n) = 0$ dobijemo jednadžbu

$$K_r \left(x_0 - x_n - v \frac{c\Delta K_r}{4\pi\gamma} \right) \frac{1}{\sqrt{\left(x_0 - x_n - v \frac{c\Delta K_r}{4\pi\gamma} \right)^2 + y_0^2}} - K_x = 0 \quad (8.19)$$

Koristeći supstituciju $a = x_0 - \frac{vc\Delta k_r}{4\pi\gamma}$ dobijemo jednadžbu

$$k_r(a - x_n) \frac{1}{\sqrt{(a - x_n)^2 + y_0^2}} - k_x = 0 \quad (8.20)$$

koja ima dva rješenja

$$x_n^* = x_0 - vt \mp \frac{k_x y_0}{\sqrt{k_r^2 - k_x^2}}. \quad (8.21)$$

Jedna stacionarna točka dovodi nas do interpretacije signala, a druga je samo dodatak u signalu koji trenutno ne možemo odstraniti. Korištenjem nultočke

$$x_n^* = x_0 - vt \mp \frac{k_x y_0}{\sqrt{k_r^2 - k_x^2}}. \quad (8.22)$$

za drugu derivaciju faze dobijemo

$$\phi''(x_n^*) = \frac{-k_r y_0^2}{\sqrt[3]{(a - x_n)^2 + y_0^2}} \quad (8.23)$$

dok je funkcija

$$\phi(x_n^*) = -\sqrt{k_r^2 - k_x^2} y_0 - k_x x_0 + \frac{vc\Delta k_r k_x}{4\pi\gamma}. \quad (8.24)$$

Metoda stacionarne faze daje nam

$$S(k_r, k_x) = \sqrt{\frac{2}{|\phi''(x_n^*)|}} e^{i\phi(x_n^*)} e^{-i\frac{\pi}{4}}. \quad (8.25)$$

Amplituda izraza nije bitna pa pišemo

$$s(k_r, k_x) = A e^{-i\sqrt{k_r^2 - k_x^2}y_0} e^{-ik_x x_0} e^{i\frac{vc\Delta K_r K_x}{4\pi\gamma}} e^{-i\frac{\pi}{4}}. \quad (8.26)$$

$A = \sqrt{\frac{2}{|\phi''(x_n^*)|}}$ Ono što je bitno uočiti je da su x_0 i y_0 odvojeni pa je moguće iz ta dva dijela dobiti koordinate točke.

Treći dio tog izraza ($\frac{vc\Delta K_r K_x}{4\pi\gamma}$) predstavlja fazni pomak zbog pomicanja radara u diskretnim koracima i može se ukloniti množenjem $S(K_r, K_x)$ s referentnom funkcijom (RFM - REFERENCA):

$$S_{RFM} = e^{i(-R_s K_r + R_s \sqrt{K_r^2 - K_x^2})} \quad (8.27)$$

gdje je R_s referentna udaljenost od objekta:

$$S(K_r, K_x) * S_{RFM} = A e^{-i\sqrt{K_r^2 - K_x^2}y_0} e^{-iK_x x_0} \quad (8.28)$$

Kako bismo prikazali točnu lokaciju promatranog objekta na rekonstruiranoj radarskoj slici, trebamo prijeći iz (K_r, K_x) područja u (K_y, K_z) . To se radi Stoltovom transformacijom koja interpolira podatke iz K_r u jednakom raspoređene podatke u K_y :

$$K_y = \sqrt{K_r^2 - K_x^2} \quad (8.29)$$

$$S(K_x, K_y) = A e^{-iK_y y_0} e^{-iK_x x_0} e^{i\frac{vc\Delta K_r K_x}{4\pi\gamma}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad (8.30)$$

To znači da izraz možemo prikazati u obliku

$$S(K_x, K_y) = e^{-iK_x x_0} e^{-iK_y y_0} \quad (8.31)$$

iz kojeg je dvodimenzionalnom inverznom Fourierovom transformacijom (2D-IFT) moguće rekonstruirati sliku.

Napomena 8.1 — omega-k algoritam. Izvedeni algoritam omogućio nam je interpretaciju snimljenog signala što nam omogućuje algoritam oblika RVP, FT po x osi, RFM, Stolt, 2D IFT ■

8.2 Implementacija Omega-k algoritma

V

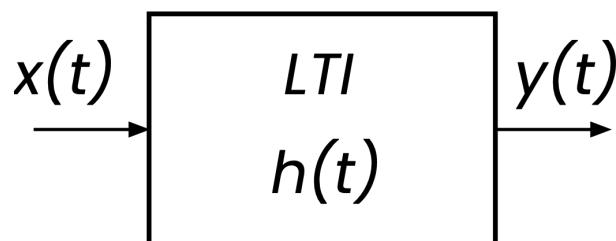
Dodatak

9	Repetitorij	93
9.1	Osnovno o signalima i LTI sustavima	
9.2	Operacije s vektorima	
9.3	Malo vjerojatnosti	
9.4	Mikro uvod u distribucije	
	Bibliografija	94
	Index	97



9. Repetitorij

9.1 Osnovno o signalima i LTI sustavima



Slika 9.1: Veza ulaza i izlaza linearog vremenski invarijantnog sustava.

9.2 Operacije s vektorima

Valno gibanje promatrat ćemo u ravnom prostoru koji obično opisujemo kao vektorski prostor \mathbb{R}^3 . Jedinične vektore označavat ćemo e_i za $i = 1, 2$ i 3 , a vektore kao

$$\mathbf{a} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \quad (9.1)$$

ili u formi vektor-stupca kao

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}. \quad (9.2)$$

$$\mathbf{a} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \quad (9.3)$$

9.3 Malo vjerojatnosti

9.4 Mikro uvod u distribucije



Bibliografija

Kompleksna analiza, asimptotske aproksimacije i teorija perturbacija

- [1] Edward J. Hinch, *Perturbation Methods*, Cambridge University Press, 2002.
- [2] Peter D. Miller, *Applied Asymptotic Analysis*, American Mathematical Society 2006.
- [3] Tristan Needham, *Visual Complex Analysis: 25th Anniversary Edition*, Oxford University Press 2023.
- [4] John. C. Neu, *Singular Perturbation in the Physical Sciences*, American Mathematical Society 2015.
- [5] Steven Strogatz, *Asymptotics and perturbation methods*, profil Stevена Strogatza, YouTube 2021.
- [6] Roscoe B. White, *Asymptotic Analysis of Differential Equations*, Imperial College Press, 2010.

Elektromagnetizam i raspršenje valova

- [7] Mark J. Ablowitz, *Nonlinear Dispersive Waves: Asymptotic Analysis and Solitons*, Cambridge University Press 2011.
- [8] Rémi Carminati, John C. Schotland, *Principles of Scattering and Transport of Light*, Cambridge University Press 2021.
- [9] Nathan Ida, *Engineering Electromagnetics, 4th edition*, Springer 2020.
- [10] Andreas Kirsch, Frank Hettlich , *The Mathematical Theory of Time-Harmonic Maxwell's Equations: Expansion-, Integral-, and Variational Methods*, Springer 2015.
- [11] Attay Kovetz, *Electromagnetic Theory*, Clarendon Press; Illustrated edition 2000.

-
- [12] Julian Schwinger, Lester L. Deraad Jr., Kimball A. Milton, Wu-yang Tsai , *Classical Electrodynamics*, CRC Press 1998.

Diferencijalne jednadžbe, teorija distribucija i integralne transformacije

- [13] Gregory Eskin, *Lectures on Linear Partial Differential Equations*, American Mathematical Society 2011.
- [14] Lawrence C. Ewans, *Partial Differential Equation, 2nd edition*, American Mathematical Society 2010.
- [15] Frederick G. Friedlander, Mark Joshi, *Introduction to the Theory of Distributions, 2nd edition*, Cambridge University Press 1999.

Teorija signala

- [16] Charles L. Byrne, *Signal Processing: A Mathematical Approach, 2nd Edition*, Chapman and Hall/CRC 2014.

RADAR i algoritmi za rekonstrukciju slike

- [17] Margaret Cheney, Brett Borden, *Fundamentals of Radar Imaging*, Society for Industrial and Applied Mathematics 2009.

Znanstveni radovi

- [18] Dwight O. North, *An Analysis of the factors which determine signal/noise discrimination in pulsed-carrier systems*, Proceedings of the IEEE, Vol. 51, Issue 7, July 1963



Kazalo

A analitička funkcija 46
antihermitska funkcija 37
autokorelacija 28

B Bedrosianov teorem 39

C Cauchy-Riemannovi uvjeti 46

D daleko polje 45
disperzija 36
disperzijska relacija 45
dugoročno ponašanje 45

E efektivna površina 11

F Fourierova transformacija 19
Fresnelovi integrali 52
funkcija predznak 25

G gustoća snage 11

H Helmholtzov teorem 55
Helmholtzova jednadžba 57
hermitska funkcija 36
Hilbertova transformacija 33
holomorfna funkcija 46

I integral Gaussove funkcije 50
integral kompleksne Gaussove funkcije 52
intenzitet zračenja antene 11
Inverzna Fourierova transformacija 20
Inverzna Hilbertova transformacija 35
Inverzna Laplaceova transformacija 44

K kauzalnost 36
kompleksificirani prikaz signala 38
konvolucija 26
korelacija 28
Kramers-Kronigovi uvjeti 36
krivulja najbržeg spusta 50

L

Laplaceova transformacija	43
linearan evolucijski problem	44

N

neparni dio signala	37
---------------------------	----

O

Osnovna radarska jednadžba	14
----------------------------------	----

P

parni dio signala	37
Parsevalova jednakost	24
Planarni val	57
Plancharelov teorem	24
PT simetrija	37
PV - prava vrijednost integrala	33

R

radarski presjek	13
renormalizacija	34
Riemann-Lebesqueva lema	53

S

spektar	19
spektar analitičkog signala	39
spektar Hilbertove transformacije	35
spektar konvolucije	27
spektar pravokutnog impulsa	20

T

trenutna amplituda	38
trenutna faza	38
trenutna frekvencija	38

U

usmjerenost antene	13
--------------------------	----